

## Corso di Algebra Lineare - a.a. 2017-2018

Prova scritta del 19.2.2018

### COMPITO D

#### Esercizio 1

Sia  $Oxyz$  un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso  $A$ ,  $B$  e  $C$  i punti di coordinate rispettivamente  $(2, -1, 2)$ ,  $(-2, 4, 0)$  e  $(-3, -3, 5)$ ;  $P$  e  $Q$  i punti di coordinate rispettivamente  $(2, -1, 0)$  e  $(4, 2, -3)$ ;  $v$  il vettore  ${}^t(1, 2, -3)$  e  $S_2$  la sfera di equazione  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z = 75$ .

- Determinare equazioni cartesiane per la sfera  $S_1$  di centro  $Q$  e raggio 5, per la retta  $r$  passante per  $P$  la cui giacitura è generata da  $v$  e per il piano  $\pi$  passante per  $A$ ,  $B$  e  $C$ ;
- determinare le posizioni relative di  $\pi$  e  $S_1$ , di  $r$  e  $\pi$  e dire se le due sfere  $S_1$  e  $S_2$  si intersecano (in un punto, in numero finito di punti, in infiniti punti) o non si intersecano;
- siano  $S_1$  e  $S_2$  due sfere esterne tra loro e sia  $s$  una retta esterna ad entrambe. Dire (dimostrandolo) se esistono sempre piani contenenti la retta  $s$  e secanti contemporaneamente a  $S_1$  e  $S_2$  e, nel caso che ne esistano sempre, se ce ne sono sempre un numero finito o infinito. **Punti: (3+4+3)**

#### Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro reale  $t$ ,  $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$F_t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t \\ 5t \\ 3t+4 \end{pmatrix}, F_t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15t \\ 5t \\ 5t+4 \end{pmatrix}, F_t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16t \\ 3t \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Determinare la matrice  $A_t$  associata a  $F_t$  nella base standard in partenza e in arrivo.
- Dire per quali valori del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ .
- Calcolare autovalori e autovettori di  $A_2$ .
- Determinare la segnatura di  $B_t = \begin{pmatrix} 0 & t-4 & 3t+4 \\ t-4 & 0 & t-5 \\ 3t+4 & t-5 & 0 \end{pmatrix}$  al variare del parametro reale  $t$ .

**Punti: (4+4+3+4)**

#### Esercizio 3

- Dire se è vero o falso che esiste  $A \in M(5, \mathbb{R})$  tali che  $A^2 - A + I = 0$  e tale che  $-1$  non sia un autovalore di  $A$ .
- Dire se è vero o falso che esiste  $A \in M(5, \mathbb{C})$  tali che  $A^2 - A + I = 0$  e tale che  $-1$  non sia un autovalore di  $A$ .
- Dire se è vero o falso che esiste  $A \in M(3, \mathbb{R})$  tale che, posta  $B := A^t \cdot A - 2I$  e posta  $q_B$  la forma quadratica associata a  $B$ , si ha  $B \neq 0$  e esiste un  $v \in \mathbb{R}^3$ ,  $v \neq 0$  e tale che  $q_B(v) = 0$ .
- Dire se è vero o falso che per ogni  $A \in M(3, \mathbb{R})$  tale che  $A$  non è un multiplo dell'identità e  $A^2 = 4I$ ,  $2$  e  $-2$  sono entrambi autovalori di  $A$ .

**Punti: (1+1+1+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2017-2018***Prova scritta del 19.2.2018 Risultati*

Nome: \_\_\_\_\_ Cognome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_  
Anno di corso: \_\_\_\_\_ Mat. \_\_\_\_\_ Fis. \_\_\_\_\_ (crocettare)  
Compito      **A**      **B**      **C**      **D**      (crocettare)

**ESERCIZIO 1**

a)

b)

c)

**ESERCIZIO 2**

(a)

(b)

(c)

(d)

**ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)**

- (1) V      F  
(2) V      F  
(3) V      F  
(4) V      F