Corso di Algebra Lineare - a.a. 2017-2018

Prova scritta del 19.2.2018

COMPITO **B**

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso A, B e C i punti di coordinate rispettivamente $(2,1,-2)$, $(0,-4,2)$ e $(5,3,3)$; P e Q i punti di coordinate rispettivamente $(2,0,1)$ e $(4,-3,-2)$; v il vettore ${}^t(1,-3,-2)$ e S_2 la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z=75$.

a) Determinare equazioni cartesiani per la sfera S_1 di centro Q e raggio 5, per la retta r passante per P la cui giacitura è generata da v e per il piano π passante per A, B e C;

b) determinare le posizioni relative di π e S_1, di r e π e dire se le due sfere S_1 e S_2 si intersecano (in un punto, in numero finito di punti, in infiniti punti) o non si intersecano;

c) siano S_1 e S_2 due sfere esterne tra loro e sia s una retta esterna ad entrambe. Dire (dimostrandolo) se esistono sempre piani contenenti la retta s e secanti contemporaneamente a S_1 e S_2 e, nel caso che ne esistano sempre, se ce ne sono sempre un numero finito o infinito.

Punti: (3+4+3)

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro reale t, $F_t:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tale che

$$F_t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5t\\5t\\5t+\frac{4}{3}\end{pmatrix},\ F_t\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15t\\5t\\7t+\frac{4}{3}\end{pmatrix},\ F_t\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16t\\-t\\-2t+\frac{4}{3}\end{pmatrix}.$$

(1) Determinare la matrice A_t associata a F_t nella base standard in partenza e in arrivo.

(2) Dire per quali valori del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

(3) Calcolare autovalori e autovettori di A_2.

(4) Determinare la segnatura di $B_t=\begin{pmatrix}0 & t-4 & 3t+4\\ t-4 & 0 & t-5\\ 3t+4 & t-5 & 0\end{pmatrix}$ al variare del parametro reale t.

Punti: (4+4+3+4)

Esercizio 3

(1) Dire se è vero o falso che esiste $A\in M(5,\mathbb{R})$ tali che $A^2-A+I=0$ e tale che -1 non sia un autovalore di A.

(2) Dire se è vero o falso che esiste $A\in M(5,\mathbb{C})$ tali che $A^2-A+I=0$ e tale che -1 non sia un autovalore di A.

(3) Dire se è vero o falso che esiste $A\in M(3,\mathbb{R})$ tale che, posta $B:=A^t\cdot A-2I$ e posta q_B la forma quadratica associata a B, si ha $B\neq 0$ e esiste un $v\in\mathbb{R}^4$, $v\neq 0$ e tale che $q_B(v)=0$.

(4) Dire se è vero o falso che per ogni $A\in M(4,\mathbb{R})$ tale che A non è un multiplo dell'identità e $A^2=4I$, 2 e -2 sono entrambi autovalori di A.

Punti: (1+1+1+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2017-2018

Prova scritta del 19.2.2018 Risultati

Nome: Cognome: Matricola:

Anno di corso: Mat. Fis. (crocettare)

Compito **A** **B** **C** **D** (crocettare)

ESERCIZIO 1

a)

b)

c)

ESERCIZIO 2

(1)

(2)

(3)

(4)

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

(1) V F
(2) V F
(3) V F
(4) V F