Corso di Algebra Lineare - a.a. 2017-2018
Prova scritta del 19.1.2018
COMPITO **A**

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso C, P e Q i punti di coordinate rispettivamente $(5,2,2)$, $(2,-1,3)$ e $(4,5,-1)$; w_1, w_2 e v i vettori rispettivamente ${}^t(1,0,2)$, ${}^t(2,1,6)$ e ${}^t(2,-1,2)$; r la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x+z=7 \\ 2y+3z=7 \end{cases} .$$

a) Determinare equazioni cartesiani per la sfera S di centro C e raggio 2 e per il piano π passante per Q e la cui giacitura è generata da w_1 e w_2, ed equazioni parametriche per la retta r;
b) determinare le posizioni relative di π e S, di r e S, di r e la retta s passante per C la cui giacitura è generata da v;
c) siano date due rette sghembe r_1 e s_1 la cui (minima) distanza è d. Dire (dimostrandolo) se esistono sfere di raggio $6d$ tangenti contemporaneamente a r_1 e s_1 e, nel caso che ne esistano, se ce ne sono un numero finito o infinito.

Punti: (3+4+3)

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro reale t, $F_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$F_t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2(1-t) \\ 1-t \\ 1-t \end{pmatrix},\ F_t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1-t \\ 2(1-t) \\ 2(1-t) \end{pmatrix},\ F_t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ t^2-4t+5 \\ -3t+4 \\ t^2-2t+3 \end{pmatrix},$$

$$F_t\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 6(1-t) \\ 3(1-t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare la matrice A_t associata a F_t nella base standard in partenza e in arrivo.
(2) Dire per quali valori del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
(3) Calcolare autovalori e autovettori di A_0.
(4) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix} t-4 & t & 0 & 0 \\ t & t+4 & 2t & t+3 \\ 0 & 2t & 0 & 0 \\ 0 & t+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ al variare del parametro reale t.

Punti: (4+4+3+4)

Esercizio 3

(1) Dire se è vero o falso che esistono $A, B \in M(4, \mathbb{C})$ tali che $A \neq 0$, $B \neq 0$ e $A^*A + B^*B = -I$.
(2) Dire se è vero o falso che esistono $A, B \in M(4, \mathbb{C})$ tali che $A \neq 0$, $B \neq 0$ e $A^*A + B^*B = I$.
(3) Dire se è vero o falso che esiste $A \in M(4, \mathbb{R})$ tale che $A^3 = 0$ e A non diagonalizzabile.
(4) Dire se è vero o falso che esiste $A \in M(3, \mathbb{R})$ tale che il rango di A^2 sia 1, $A^2 = A^3$ e tale che 1 non sia un autovalore di A.

Punti: (1+1+2+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2017-2018
Prova scritta del 19.1.2018 Risultati

Nome: Cognome: Matricola:

Anno di corso: Mat. Fis. (crocettare)

Compito **A** **B** **C** **D** (crocettare)

ESERCIZIO 1

a)

b)

c)

ESERCIZIO 2

(1)

(2)

(3)

(4)

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

(1) V F
(2) V F
(3) V F
(4) V F