Corso di Algebra Lineare - a.a. 2016-2017

Prova scritta del 19.1.2017

COMPITO **D**

Esercizio 1 Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P e Q i punti di coordinate rispettivamente $(2,-1,4)$ e $(0,1-1)$; v_1, v_2 e w i vettori rispettivamente ${}^t(-1,2,3)$, ${}^t(3,-1,1)$ e ${}^t(0,2,-1)$; inoltre, sia S la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2-10x-4y+4z+29=0$, r_1 la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 3x-2y-2z=-1 \\ y-z=4 \end{cases},$$

r_2 la retta passante per Q la cui giacitura è generata da w.

a) Determinare centro e raggio di S, equazioni parametriche per la retta r_1 ed equazioni cartesiane per il piano π passante per P e la cui giacitura è generata da v_1 e v_2;
b) determinare le posizioni relative di π e S, di r_1 e S, di r_1 e r_2;
c) siano date due rette sghembe s_1 e s_2 e una sfera B esterna ad ambedue le rette. Esistono rette contemporaneamente incidenti a s_1 ed s_2 e tangenti a B? Se sì, ne esistono infinite?

Punti: (3+4+3)

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro reale t, $F_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$F_t\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{t}{2}\\-2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}, F_t\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t\\2t\\4\\-1\end{pmatrix}, F_t\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\\5t\\-1\end{pmatrix}, F_t\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8t\\-4t\\0\\-t+3\end{pmatrix}.$$

(1) Determinare la matrice A_t associata a F_t nella base ordinata

$$\mathcal{B} := \{v_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, v_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\}$$

in partenza e in arrivo.

(2) Dire per quali valori del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

(3) Calcolare autovalori e autovettori di $M := \begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&1&2&4\\-4&0&5&0\\-1&0&1&2\end{pmatrix}$.

(4) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix}2t&-t&-3t&0\\-t&2t&2t&0\\-3t&2t&10t&1\\0&0&1&1-t\end{pmatrix}$ al variare del parametro reale t.

Punti: (4+4+3+4)

Esercizio 3 Sia $A := \begin{pmatrix}1&1&0\\1&-4&3\\0&3&0\end{pmatrix}$ e sia ϕ la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ data da $\phi(v,w) = {}^tvAw$, $\forall v,w \in \mathbb{R}^3$.

(1) Dire se è vero o falso che esiste un $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $v \neq 0$ e $\phi(v,v)=0$.
(2) Dire se è vero o falso che $A + {}^tBB$ è semidefinita positiva per ogni $B \in M(3,\mathbb{R})$, $B \neq 0$.
(3) Dire se è vero o falso che $A + {}^tBB$ è semidefinita negativa per ogni $B \in M(3,\mathbb{R})$, $B \neq 0$.
(4) Dire se è vero o falso che esistono matrici $A \in M(3,\mathbb{C})$ tali che $A^* = iA$, $det(A) = 6(i+1)$ e se esistono, dire se sono tutte diagonalizzabili su $\mathbb{C}$.

Punti: (1+1+1+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2016-2017

Prova scritta del 19.01.2017 Risultati

Nome: Cognome: Matricola:

Anno di corso: Mat. Fis. (crocettare)

Compito **A** **B** **C** **D** (crocettare)

ESERCIZIO 1

(1)

(2)

(3)

ESERCIZIO 2

(1)

(2)

(3)

(4)

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

(1) V F
(2) V F
(3) V F
(4) V F