

Corso di Algebra Lineare - a.a. 2016-2017

Prova scritta del 19.1.2017

COMPITO A

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P e Q i punti di coordinate rispettivamente $(2, -4, 1)$ e $(0, -1, -1)$; v_1, v_2 e w i vettori rispettivamente ${}^t(1, 3, 2)$, ${}^t(3, -1, 1)$ e ${}^t(0, 1, -2)$; inoltre, sia S la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 4y + 4z + 29 = 0$, r_1 la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = -1 \\ y + z = 4 \end{cases},$$

r_2 la retta passante per Q la cui giacitura è generata da w .

- (1) Determinare centro e raggio di S , equazioni parametriche per la retta r_1 ed equazioni cartesiane per il piano π passante per P e la cui giacitura è generata da v_1 e v_2 ;
- (2) determinare le posizioni relative di π e S , di r_1 e S , di r_1 e r_2 ;
- (3) siano date due rette sghembe s_1 e s_2 e una sfera B esterna ad ambedue le rette. Esistono rette contemporaneamente incidenti a s_1 ed s_2 e tangenti a B ? Se sì, ne esistono infinite?

Punti: (3+4+3)

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro reale t , $F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che

$$F_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{t}{2} \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, F_t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, F_t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5t \\ -1 \end{pmatrix}, F_t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8t \\ -4t \\ 0 \\ -t+3 \end{pmatrix}.$$

- (1) Determinare la matrice A_t associata a F_t nella base ordinata

$$\mathcal{B} := \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

in partenza e in arrivo.

- (2) Dire per quali valori del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile su \mathbb{R} .

- (3) Calcolare autovalori e autovettori di $M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ -4 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- (4) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix} 2t & -t & -3t & 0 \\ -t & 2t & 2t & 0 \\ -3t & 2t & 10t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix}$ al variare del parametro

reale t .

Punti: (4+4+3+4)

Esercizio 3 Sia $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ e sia ϕ la forma bilineare simmetrica su \mathbb{R}^3 data da

$$\phi(v, w) = {}^t v A w, \forall v, w \in \mathbb{R}^3.$$

- (1) Dire se è vero o falso che esiste un $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $v \neq 0$ e $\phi(v, v) = 0$.
- (2) Dire se è vero o falso che $A + {}^t B B$ è semidefinita positiva per ogni $B \in M(3, \mathbb{R})$, $B \neq 0$.
- (3) Dire se è vero o falso che $A + {}^t B B$ è semidefinita negativa per ogni $B \in M(3, \mathbb{R})$, $B \neq 0$.
- (4) Dire se è vero o falso che esistono matrici $A \in M(3, \mathbb{C})$ tali che $A^* = iA$, $\det(A) = i + 1$ e se esistono, dire se sono tutte diagonalizzabili su \mathbb{C} .

Punti: (1+1+1+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2016-2017*Prova scritta del 19.01.2017 Risultati*

Nome: _____ Cognome: _____ Matricola: _____

Anno di corso: _____ Mat. _____ Fis. _____ (crocettare)

Compito **A** **B** **C** **D** (crocettare)**ESERCIZIO 1**

(1)

(2)

(3)

ESERCIZIO 2

(1)

(2)

(3)

(4)

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

(1) V F

(2) V F

(3) V F

(4) V F