

Corso di Algebra Lineare - a.a. 2015-2016

Prova scritta del 19.1.2016

COMPITO C

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P_1 e P_2 i punti di coordinate rispettivamente $(3, 4, -5)$, $(1, 6, -6)$; C e Q i punti di coordinate risp. $(3, 1, -2)$ e $(2, -1, -4)$; inoltre, sia s la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ x + z = 2 \end{cases}.$$

- (1) Scrivere equazioni cartesiane per la retta r passante per P_1 e P_2 , il piano π_2 passante per Q e contenente la retta s e per la sfera S con centro nel punto C e raggio 4;
- (2) determinare le posizioni relative di r e S , di π e S , di r e s ;
- (3) siano π' un piano e S' una sfera di raggio R' , esterni l'uno all'altra, tali che la distanza tra i due sia minore o uguale a $R'/2$; esistono infiniti punti T_1 in π' che sono vertici di triangoli equilateri che hanno gli altri due vertici T_2 e T_3 sulla sfera S' ?

Punti: (3+4+3)

Esercizio 2 Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro reale t ,

$F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che

$$F_t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ 3t-2 \\ 0 \end{pmatrix}, F_t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ -t \\ 5t-2 \\ 0 \end{pmatrix}, F_t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ -t \\ 3t-2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$F_t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t-1 \\ -t \\ 3t-2 \\ -t \end{pmatrix}.$$

- (1) Determinare la matrice A_t associata a F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^4 .
- (2) Dire per quali valori del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile su \mathbb{R} .
- (3) Calcolare autovalori e autovettori di A_{-1} .
- (4) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 2 & -2 \\ 0 & t-1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & t+1 \end{pmatrix}$ al variare del parametro

reale t .

Punti: (4+4+3+4)

Esercizio 3 Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 15 \end{pmatrix}$

- (1) Dimostrare che esiste una matrice $B \in GL(3, \mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.
- (2) Dire se è vero o falso che $A + {}^tCC$ è definita positiva per ogni matrice C di ordine 3 a coefficienti reali.
- (3) Dire se è vero o falso che $3iA + i({}^tCC)$ è diagonalizzabile su \mathbb{C} per ogni matrice C di ordine 3 a coefficienti reali.
- (4) Dire se è vero o falso che $3iA + i({}^tCC)$ ha almeno un autovalore reale per ogni matrice C di ordine 3 a coefficienti reali.

Punti: (2+1+1+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2015-2016*Prova scritta del 19.01.2016 Risultati*

Nome: _____ Cognome: _____ Matricola: _____

Anno di corso: _____ Mat. _____ Fis. _____ (crocettare)

Compito **A** **B** **C** **D** (crocettare)**ESERCIZIO 1**

(1)

(2)

(3)

ESERCIZIO 2

(1)

(2)

(3)

(4)

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

(2) V F

(3) V F

(4) V F