Corso di Algebra Lineare - a.a. 2015-2016

Prova scritta del 19.1.2016

COMPITO **B**

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P_1 e P_2 i punti di coordinate rispettivamente $(5,3,4),(6,1,6)$; C e Q i punti di coordinate risp. $(2,3,1)$ e $(4,2,-1)$; inoltre, sia s la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} y-2z=8 \\ x-2z=6 \end{cases} .$$

(1) Scrivere equazioni cartesiane per la retta r passante per P_1 e P_2, il piano π_2 passante per Q e contenente la retta s e per la sfera S con centro nel punto C e raggio 4;

(2) determinare le posizioni relative di r e S, di π e S, di r e s;

(3) siano π' un piano e S' una sfera di raggio R', esterni l'uno all'altra, tali che la distanza tra i due sia minore o uguale a $R'/2$; esistono infiniti punti T_1 in π' che sono vertici di triangoli equilateri che hanno gli altri due vertici T_2 e T_3 sulla sfera S'?

Punti: (3+4+3)

Esercizio 2 Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro reale t, $F_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$F_t\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t\\-t\\3t-2\\0\end{pmatrix},\ F_t\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3t\\-t\\5t-2\\0\end{pmatrix},\ F_t\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t-1\\-t\\3t-2\\0\end{pmatrix},$$

$$F_t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t-1\\-t\\3t-2\\-t\end{pmatrix}.$$

(1) Determinare la matrice A_t associata a F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$.

(2) Dire per quali valori del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

(3) Calcolare autovalori e autovettori di A_{-1}.

(4) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 2 & -2 \\ 0 & t-1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & t+1 \end{pmatrix}$ al variare del parametro reale t.

Punti: (4+4+3+4)

Esercizio 3 Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 15 \end{pmatrix}$

(1) Dimostrare che esiste una matrice $B \in GL(3,\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

(2) Dire se è vero o falso che $A - {}^tCC$ è definita positiva per ogni matrice C di ordine 3 a coefficienti reali.

(3) Dire se è vero o falso che $2iA + i({}^tCC)$ è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ per ogni matrice C di ordine 3 a coefficienti reali.

(4) Dire se è vero o falso che $2iA + i({}^tCC)$ ha almeno un autovalore reale per ogni matrice C di ordine 3 a coefficienti reali.

Punti: (2+1+1+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2015-2016

Prova scritta del 19.01.2016 Risultati

Nome: Cognome: Matricola:

Anno di corso: Mat. Fis. (crocettare)

Compito **A** **B** **C** **D** (crocettare)

ESERCIZIO 1

(1)

(2)

(3)

ESERCIZIO 2

(1)

(2)

(3)

(4)

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

(2) V F
(3) V F
(4) V F