Scritto di Geometria 2
18/06/2019 - a.a. 2018-2019

Esercizio 1
Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata per lunghezza d'arco e biregolare con curvatura k e torsione τ entrambe costanti, con $\tau < 0$. Sia $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\beta(s) := \alpha(s) + \frac{1}{k}\mathbf{n}(\mathbf{s}) + \frac{1}{k}\mathbf{b}(\mathbf{s})$, dove $\mathbf{n}(\mathbf{s})$ e $\mathbf{b}(\mathbf{s})$ sono rispettivamente il versore normale e quello binormale a $\alpha(s)$.

1. Dire se β è regolare e biregolare.
2. Determinare il triedro di Frenet di β in funzione di quello di α.
3. Dire se esistono dei valori dei parametri k e τ per i quali la curvatura di β è uguale k e la torsione di β è uguale a τ.

Esercizio 2
Sia $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$.

1. Dimostrare che S è una superficie regolare, compatta e orientabile e determinare una mappa di Gauss di S.
2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Mostrare che la restrizione di F a S è un'isometria di S.
3. Sia $X := S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ e sia $C := \{(x, y, z) \in X \mid F(x, y, z) = (x, y, z)\}$. Dire se C è una geodetica di X.
4. Dimostrare che la curvatura gaussiana K di S è maggiore o uguale a zero in ogni punto e non è identicamente nulla.
5. Calcolare $\int_S K d\sigma$.

Esercizio 3
Sia T il toro di rivoluzione ottenuto ruotando la circonferenza
$C = \{x = 0,\ (y - 3)^2 + z^2 = 1\}$ intorno all'asse z.
Sia $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$, sia
$Y = \{(0, y, z) \mid y^2 + z^2 = 4\}$. Siano $X = T \cup D$, $Z = X \cup Y$.

1. Determinare il gruppo fondamentale di X.
2. Determinare il gruppo fondamentale di Z.
3. Dire se Z è omotopicamente equivalente a T.