Scritto di Geometria 2
17/11/2014 - a.a. 2013-2014

Esercizio 1 Sia $\underline{\alpha}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la seguente curva differenziabile:

$$\alpha(t) = (sent, cost, a\ cost + b\ sent + c); \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

1. Verificare che $\underline{\alpha}$ è una curva differenziabile biregolare.
2. Calcolare la curvatura $k(t)$ in ogni punto $P = \underline{\alpha}(t)$.
3. Calcolare la torsione $\tau(t)$ in ogni punto $P = \underline{\alpha}(t)$; stabilire se esiste un piano che contiene la traccia di $\underline{\alpha}$.
4. Determinare il triedro di Frenet nel punto $P = \underline{\alpha}(\frac{\pi}{2})$.

Esercizio 2
Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0,\ x^2 + 6yz + z^2 + y^2 = 0\}$.

1. Mostrare che S è una superficie regolare e orientabile.
2. Sia $P := (2\sqrt{2}, -3, 1)$. Verificare che $P \in S$ e determinare il piano tangente ad S in P.
3. Per ogni $\lambda > 0$ sia $v_\lambda := \lambda(2\sqrt{2}, -3, 1)$. Verificare che v_λ appartiene al piano tangente a P in S.
4. Sia II_P la seconda forma fondamentale di S in P. Determinare $II_P(v_\lambda)$.
5. Dire se P è un punto ellittico.

Esercizio 3 Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono retratti di deformazione di $\mathbb{R}^2$:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 = 4\},$$

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = 0\}.$$