Corso di Algebra Lineare - a.a. 2017-2018
Prova scritta del 1.2.2018
COMPITO **D**

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P e Q i punti di coordinate rispettivamente $(1,3,2)$ e $(3,2,4)$, e A il punto di coordinate $(2,5,-1)$; inoltre, sia v il vettore ${}^t(-1,8,5)$ e S la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2+4x-2x+2z+2=0$.

a) Trovare centro e raggio di S, scrivere equazioni cartesiane per la retta r passante per P e Q ed equazioni parametriche per il piano π passante per A la cui giacitura è ortogonale al vettore v;
b) determinare le posizioni relative di r e π, di r e S e determinare un punto (eventualmente unico) di minima distanza del piano π dalla sfera S;
c) siano S_1 ed S_2 due sfere disgiunte dello stesso raggio (positivo) contenute nei due diversi semispazi individuati da un piano π_1. Dire (dimostrandolo) se esistono sempre quadrati con un vertice su S_1, un vertice su S_2 e due vertici su π, e se esistono sempre, se essi sono sempre in numero finito o infinito.

Punti: (3+4+3)

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro reale t, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F_t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t-2 \\ 4t+6 \\ -2t^2+12t \end{pmatrix},\ F_t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 6t \\ -(t-2)^2 \end{pmatrix},\ F_t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6t-9 \\ -6t \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare la matrice A_t associata a F_t nella base standard in partenza e in arrivo.
(2) Dire per quali valori del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
(3) Calcolare autovalori e autovettori di A_0.
(4) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix} 0 & t-1 & t+1 & t \\ t-1 & 0 & 2 & 3 \\ t+1 & 2 & 0 & 0 \\ t & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ al variare del parametro reale t.

Punti: (4+4+3+4)

Esercizio 3

(1) Dire se è vero o falso che esiste una matrice $A \in M(4,\mathbb{C})$ tali che $A \neq 0$ e $A^t \cdot A = 0$.
(2) Dire se è vero o falso che esiste una matrice $A \in M(3,\mathbb{R})$ tali che $A \neq 0$ e $A^t \cdot A = 0$.
(3) Dire se è vero o falso che esistono matrici $A \in M(5,\mathbb{C})$ tali che $A^* = A^2 + A + I$. Se esistono, dire se sono tutte diagonalizzabili.
(4) Dire se è vero o falso che esiste una matrice $A \in M(5,\mathbb{C})$ tale che $A^2 - 6A + 9I = 0$, che non sia multiplo dell'identità e che sia diagonalizzabile.

Punti: (1+1+2+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2017-2018
Prova scritta del 1.2.2018 Risultati

Nome: Cognome: Matricola:

Anno di corso: Mat. Fis. (crocettare)

Compito **A** **B** **C** **D** (crocettare)

ESERCIZIO 1

a)

b)

c)

ESERCIZIO 2

(1)

(2)

(3)

(4)

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

(1) V F
(2) V F
(3) V F
(4) V F