

## Corso di Algebra Lineare - a.a. 2017-2018

Prova scritta del 1.2.2018

### COMPITO C

#### Esercizio 1

Sia  $Oxyz$  un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso  $P$  e  $Q$  i punti di coordinate rispettivamente  $(-3, 1, -2)$  e  $(-2, 3, -4)$ , e  $A$  il punto di coordinate  $(-5, 2, -1)$ ; inoltre, sia  $v$  il vettore  ${}^t(8, 1, 5)$  e  $S$  la sfera di equazione  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z - 3 = 0$ .

- Trovare centro e raggio di  $S$ , scrivere equazioni cartesiane per la retta  $r$  passante per  $P$  e  $Q$  ed equazioni parametriche per il piano  $\pi$  passante per  $A$  la cui giacitura è ortogonale al vettore  $v$ ;
- determinare le posizioni relative di  $r$  e  $\pi$ , di  $r$  e  $S$  e determinare un punto (eventualmente unico) di minima distanza del piano  $\pi$  dalla sfera  $S$ ;
- siano  $S_1$  ed  $S_2$  due sfere disgiunte dello stesso raggio (positivo) contenute nei due diversi semispazi individuati da un piano  $\pi_1$ . Dire (dimostrandolo) se esistono sempre quadrati con un vertice su  $S_1$ , un vertice su  $S_2$  e due vertici su  $\pi$ , e se esistono sempre, se essi sono sempre in numero finito o infinito.

**Punti: (3+4+3)**

#### Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro reale  $t$ ,  $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$F_t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t - 2 \\ 4t + 6 \\ -2t^2 + 12t - 4 \end{pmatrix}, F_t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 6t \\ -(t-2)^2 \end{pmatrix}, F_t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6t - 9 \\ -6t + 3 \end{pmatrix}.$$

- Determinare la matrice  $A_t$  associata a  $F_t$  nella base standard in partenza e in arrivo.
- Dire per quali valori del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ .
- Calcolare autovalori e autovettori di  $A_0$ .

- Determinare la segnatura di  $B_t = \begin{pmatrix} 0 & t-1 & t+1 & t \\ t-1 & 0 & 2 & 3 \\ t+1 & 2 & 0 & 0 \\ t & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  al variare del parametro reale  $t$ .

**Punti: (4+4+3+4)**

#### Esercizio 3

- Dire se è vero o falso che esiste una matrice  $A \in M(5, \mathbb{C})$  tali che  $A \neq 0$  e  $A^t \cdot A = 0$ .
- Dire se è vero o falso che esiste una matrice  $A \in M(4, \mathbb{R})$  tali che  $A \neq 0$  e  $A^t \cdot A = 0$ .
- Dire se è vero o falso che esistono matrici  $A \in M(3, \mathbb{C})$  tali che  $A^* = A^2 + A + I$ . Se esistono, dire se sono tutte diagonalizzabili.
- Dire se è vero o falso che esiste una matrice  $A \in M(4, \mathbb{C})$  tale che  $A^2 - 6A + 9I = 0$ , che non sia multiplo dell'identità e che sia diagonalizzabile.

**Punti: (1+1+2+1)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2017-2018***Prova scritta del 1.2.2018 Risultati*

Nome:

Cognome:

Matricola:

Anno di corso:

Mat.

Fis.

(crocettare)

Compito

**A****B****C****D**

(crocettare)

**ESERCIZIO 1**

a)

b)

c)

**ESERCIZIO 2**

(1)

(2)

(3)

(4)

**ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)**

(1) V      F

(2) V      F

(3) V      F

(4) V      F