Corso di Algebra Lineare - a.a. 2015-2016
Prova scritta del 3.2.2016
COMPITO **A**

Esercizio 1 Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P_1, P_2 e P_3 i punti di coordinate rispettivamente $(1,0,-1),(-1,4,2)$ e $(-2,-5,4)$; C e A i punti di coordinate rispettivamente $(1,-2,3)$ e $(1,1,1)$; inoltre, sia v il vettore ${}^t(3,-2,-1)$ e S la sfera di centro C e raggio 4.

(1) Scrivere equazioni cartesiane per la retta r passante per P_1 e di giacitura generata dal vettore v, il piano π_1 passante per P_1, P_2 e P_3 e il piano π_2 passante per A e di giacitura ortogonale a v;
(2) determinare le posizioni relative di π_1 e S, di r e S, di π_1 e π_2;
(3) siano π un piano e S_1, S_2 due sfere esterne l'una all'altra, di raggio diverso e contenute nello stesso semispazio rispetto al piano π. Dimostrare che esiste una sfera tangente contemporaneamente a π, S_1 e S_2. Ne esistono infinite?

Punti: (3+4+3)

Esercizio 2 Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro reale t,
$F_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$F_t\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t+3\\4t+2\\0\\0\end{pmatrix},\ F_t\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-t-3\\2\\0\\0\end{pmatrix},\ F_t\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\\frac{t}{2}+2\end{pmatrix},$$

$$F_t\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2t+4\\t+2\\-2t+1\\-\frac{3t}{2}+2\end{pmatrix}.$$

(1) Determinare la matrice A_t associata a F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$.
(2) Dire per quali valori del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
(3) Calcolare autovalori e autovettori di A_{-2}.
(4) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix}t^2 & t & 0\\ t & 1 & t+1\\ 0 & t+1 & (t+1)^2\end{pmatrix}$ al variare del parametro reale t.

Punti: (4+4+3+4)

Esercizio 3

(1) Dire se è vero o falso che 1 è un autolavore di A, per ogni $A \in M(3,\mathbb{R})$ tale che $A \neq -I$ e $A^2 = I$.
(2) Dire se è vero o falso che 1 è un autolavore di A, per ogni $A \in M(4,\mathbb{R})$ tale che $A^3 = I$.
(3) Sia $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica non degenere e indefinita. Dire se è vero o falso che esiste $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ tale che $\phi(v,v) = 0$.
(4) Sia $\psi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica non degenere. Dire se è vero o falso che esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ di dimensione 3 tale che $\psi_{|W\times W}$ sia identicamente nulla.

Punti: (1+1+1+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2015-2016
Prova scritta del 03.02.2016 Risultati

Nome: Cognome: Matricola:

Anno di corso: Mat. Fis. (crocettare)

Compito **A** **B** **C** **D** (crocettare)

ESERCIZIO 1

(1)

(2)

(3)

ESERCIZIO 2

(1)

(2)

(3)

(4)

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

(1) V F
(2) V F
(3) V F
(4) V F