

Corso di Algebra Lineare - a.a. 2016-2017

Prova scritta del 1.2.2017

COMPITO C

Esercizio 1 Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso C , P e Q i punti di coordinate rispettivamente $(3, -1, -2)$, $(2, 3, 0)$ e $(1, 3, 2)$; v e w i vettori rispettivamente ${}^t(1, 2, -2)$ e ${}^t(1, 0, -2)$; inoltre, sia π_1 il piano di equazione $2x - 2y - z = 1$, s_1 la retta passante per P la cui giacitura è generata da v e s_2 la retta passante per Q la cui giacitura è generata da w . Sia S la sfera di centro C e raggio 4.

- (1) Determinare un'equazione cartesiana di S , un'equazione parametrica di π_1 ed equazioni cartesiane per la retta n passante per P e perpendicolare a π_1 ;
- (2) determinare le posizioni relative di π_1 e S , di s_1 e π_1 , di s_2 e S ;
- (3) sia dato un piano π_2 , una retta s_3 parallela a π_2 e distante da esso 2 e una retta s_4 (incidente e) perpendicolare a s_3 , ma né parallela, né perpendicolare a π_2 . Esistono sfere di raggio 3 contemporaneamente tangenti a π_2 , s_3 e s_4 ? Se sì, ne esistono infinite?

Punti: (3+4+3)

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro reale t , $F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che

$$F_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-1 \\ -2t \\ -3t \\ 3t \end{pmatrix}, F_t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+2 \\ 2t+1 \\ t+\frac{1}{4} \\ -3t-\frac{1}{4} \end{pmatrix}, F_t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2t-1 \\ 0 \end{pmatrix}, F_t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ t+2 \\ 2t-3 \end{pmatrix}.$$

- (1) Determinare la matrice A_t associata a F_t nella base ordinata

$$\mathcal{B} := \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

in partenza e in arrivo.

- (2) Dire per quali valori del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile su \mathbb{R} .

- (3) Calcolare autovalori e autovettori di $M := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 5 & 3 \\ 9 & \frac{1}{4} & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- (4) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix} (t-3)^2 & t(t-3) & t^3+1 \\ t(t-3) & t^2 & 0 \\ t^3+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ al variare del parametro reale t .

Punti: (4+4+3+4)

Esercizio 3

- (1) Dire se è vero o falso che per ogni $A \in M(5, \mathbb{C})$ che non è un multiplo dell'identità e tale che $A^2 = -I$ si ha che gli autovalori di A sono i e $-i$.
- (2) Dire se è vero o falso che esiste una matrice $A \in Mat(4, \mathbb{R})$ che ha un autovalore λ tale che gli autovalori di $A - \lambda I$ siano $1, -1, 2, -2$.
- (3) Siano $A, B \in M(4, \mathbb{R})$ simmetriche, siano q_A e q_B le forme quadratiche associate e supponiamo che q_B sia definita positiva. Dire se è vero o falso che esiste una base di \mathbb{R}^4 che è ortogonale sia per q_A che per q_B .
- (4) Dire se è vero o falso che per ogni A e B come nel punto (3) vale $AB = BA$.

Punti: (1+1+2+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2016-2017*Prova scritta del 01.02.2017 Risultati*

Nome: _____ Cognome: _____ Matricola: _____

Anno di corso: _____ Mat. _____ Fis. _____ (crocettare)

Compito **A** **B** **C** **D** (crocettare)**ESERCIZIO 1**

(1)

(2)

(3)

ESERCIZIO 2

(1)

(2)

(3)

(4)

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

(1) V F

(2) V F

(3) V F

(4) V F