

1 Serie di potenze

È stato dimostrato che la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad (1.1)$$

converge se e solo se la ragione x soddisfa la disuguaglianza $-1 < x < 1$. In realtà c'è convergenza assoluta in $] -1, 1[$. Per $x \geq 1$ la serie diverge positivamente, per $x \leq -1$ essa risulta indeterminata. L'insieme di convergenza è un intervallo con centro in $x = 0$. Se $x \in] -1, 1[$, la somma della serie è $(1 - x)^{-1}$. Quindi, possiamo scrivere

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}, \quad x \in] -1, 1[. \quad (1.2)$$

La serie geometrica è un esempio di serie di potenze.

Definizione 1 Chiamiamo **serie di potenze** ogni serie della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots \quad (1.3)$$

I numeri reali a_n e il punto x_0 sono assegnati e si chiamano, rispettivamente, **coefficienti** e **centro** della serie di potenze (1.3). Invece $x \in \mathbb{R}$ è variabile. Si tratta pertanto di una serie di funzioni, visto che il termine generale dipende dalla variabile reale x .

La serie (1.1) si ottiene in corrispondenza delle scelte $a_n = 1$, per ogni n , e $x_0 = 0$.

Data una serie di potenze, il problema più naturale che ci si pone è quello relativo alla sua convergenza, che, come ci si aspetta, dipenderà da x .

Osservazione 1 L'insieme di convergenza della serie (1.3), ossia l'insieme degli x per cui (1.3) converge, è non vuoto perché contiene sempre il centro x_0 . Infatti, se $x = x_0$, la serie (1.3) si riduce all'unico addendo a_0 e quindi converge.

Vediamo ancora due esempi di serie di potenze.

Esempio 1 Prendiamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Qui $x_0 = 0$ e $a_n = \frac{1}{n!}$. Applicando il criterio del rapporto alla serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!}$, si trova che (1.4) è assolutamente convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque, l'insieme di convergenza è (come per la serie geometrica) un intervallo di centro 0.

Esempio 2 La serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.5)$$

con $x_0 = 0$ e $a_n = n!$, converge solo per $x = 0$ giacchè per $x \neq 0$ il termine generale non è neppure infinitesimo. L'insieme di convergenza $\{0\}$ può essere considerato un intervallo “degenere”, in quanto ridotto ad un solo punto.

Dunque, in tutti gli esempi considerati gli insiemi di convergenza sono intervalli centrati nel punto 0, centro delle serie, di raggi rispettivamente 1, $+\infty$ e 0. Ciò non è casuale. Sussiste infatti il seguente importante teorema che stabilisce la natura dell'insieme di convergenza di una serie di potenze.

Teorema 1 *Per la serie (1.3) vale una delle seguenti alternative.*

1. *La serie converge solo per $x = x_0$.*
2. *La serie converge (e la convergenza è assoluta) per ogni $x \in \mathbb{R}$.*
3. *Esiste $R > 0$ tale che la serie converge assolutamente per $|x - x_0| < R$ e non converge per $|x - x_0| > R$. Il carattere in corrispondenza degli estremi $x = x_0 \pm R$ varia di caso in caso.*

DIM. Assumiamo che $x_0 = 0$. Ciò è sempre possibile tramite il cambiamento di variabile $y = x - x_0$. Supponiamo che esista $x_1 \neq 0$ tale che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_1^n$ con-

verge. Proviamo che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge assolutamente per ogni $|x| < |x_1|$. Siccome

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_1^n$ è convergente, si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n x_1^n = 0$ e quindi esiste $M > 0$ tale che

$$|a_n x_1^n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ne segue che, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_1} \right|^n.$$

Siccome $\left| \frac{x}{x_1} \right| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$ converge e quindi, dalla disuguaglianza prece-

dente, applicando il criterio del confronto, ricaviamo che anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$

converge.

Risulta così dimostrato che l'insieme di convergenza è un intervallo. Poniamo

$$R = \sup \left\{ |x| : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge} \right\} \quad (1.6)$$

Osserviamo che l'insieme di cui R è l'estremo superiore non è vuoto, per l'Osservazione 1. Quindi la definizione è ben posta. Se $R = 0$, allora si verifica il caso 1. Se $R = +\infty$ allora vale 2. Se $0 < R < +\infty$, la serie converge assolutamente se $|x| < R$ e non converge per $|x| > R$. Quindi vale 3.

Se $x_0 \neq 0$, basta effettuare il cambio di variabile $y = x - x_0$ che trasforma la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ centrata in x_0 nella serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$ centrata in 0 e applicare a quest'ultima la prima parte.

□

In generale, se $x_0 \neq 0$, al posto di (1.6) avremo

$$R = \sup \left\{ |x - x_0| : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ converge} \right\}.$$

R , che può essere un numero non nullo oppure 0 oppure $+\infty$, si chiama **raggio di convergenza** della serie (1.3).

Osservazione 2 Come conseguenza del Teorema, per individuare il raggio di convergenza R di una serie di potenze è sufficiente studiarne la convergenza assoluta. Fatto questo, resta solo da stabilire il carattere della serie agli estremi dell'intervallo $]x_0 - R, x_0 + R[$.

Esempio 3 Determiniamo l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+3)^{3n}}{8^n n^2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

centrata in $x_0 = -3$. Osserviamo che la serie di potenze non è completa poiché mancano tutte le potenze per cui l'esponente non è multiplo di 3:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+3)^{3n}}{8^n n^2} = \frac{(x+3)^3}{8} + \frac{(x+3)^6}{8^2 2^2} + \frac{(x+3)^9}{8^3 3^2} + \dots$$

Ciò significa che

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{8^k k^2} & \text{se } n = 3k, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Studiamo la convergenza assoluta della serie tramite il criterio del rapporto:

$$\frac{\frac{|x+3|^{3(n+1)}}{8^{n+1}(n+1)^2}}{\frac{|x+3|^{3n}}{8^n n^2}} = \frac{(x+3)^{3n+3}}{8^{n+1}(n+1)^2} \cdot \frac{8^n n^2}{|x+3|^{3n}} = \frac{|x+3|^3}{8} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} \longrightarrow \frac{|x+3|^3}{8}.$$

Se $\frac{|x+3|^3}{8} < 1$, ossia $|x+3| < 2$, la serie converge assolutamente. Se $|x+3| > 2$, la serie non converge. Dunque $R = 2$. Resta da vedere cosa fa la serie quando $|x+3| = 2$, cioè per $x = -5$ e $x = -1$. Sostituendo $x = -5$ in (1.7) otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^{3n}}{8^n n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8^n (-1)^n}{8^n n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

che è una serie assolutamente convergente. Sostituendo $x = -1$, invece, la serie (1.7) diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2)^{3n}}{8^n n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Quindi anche per $x = -1$ la serie converge. In conclusione, la serie (1.7) converge se e solo se $x \in [-5, -1]$.

Osservazione 3 A ribadire il fatto che il carattere di una serie di potenze in corrispondenza dei valori $x = x_0 \pm R$ dipende da caso in caso, consideriamo le seguenti serie centrate in $x_0 = 0$ e aventi tutte raggio di convergenza $R = 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

La prima serie converge solo in $] -1, 1[$, la seconda in $[-1, 1[$, la terza in $[-1, 1]$.

Il prossimo risultato riguarda il comportamento delle serie di potenze rispetto alle operazioni elementari. Per semplicità prendiamo serie centrate in 0.

Proposizione 1 (a) Se $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} (c a_n) x^n = c \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, per ogni x

per cui $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge.

(b) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge per $|x| < R_a$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ converge per $|x| < R_b$, allora

la serie somma $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$ ha raggio di convergenza $R \geq \min\{R_a, R_b\}$ e risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

per tutti gli x per cui entrambe le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ convergono.

Il seguente teorema afferma che una serie di potenze può essere derivata e integrata termine a termine. Pertanto, essa si comporta a tutti gli effetti come un “polinomio di grado infinito”.

Teorema 2 Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Sia f la sua somma, cioè

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

per ogni $x \in]-R, R[$. Allora valgono le seguenti proprietà.

1. **La serie derivata** (ottenuta derivando termine a termine la serie di partenza)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

ha lo stesso raggio di convergenza R (ma non lo stesso insieme di convergenza, in generale). Inoltre f è derivabile in $] - R, R[$ e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots,$$

per ogni $x \in]-R, R[$.

2. **La serie integrata** (ottenuta integrando termine a termine la serie di partenza)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = a_0 x + a_2 \frac{x^2}{2} + a_3 \frac{x^3}{3} + \dots$$

ha lo stesso raggio di convergenza R (ma non lo stesso insieme di convergenza, in generale). Inoltre, per ogni $x \in]-R, R[$ risulta

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \quad (1.8)$$

La formula (1.8) può essere riscritta nella forma più esplicita

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt.$$

Naturalmente è possibile iterare la procedura e quindi derivare ancora una volta la serie derivata. Si trova così che la somma f è derivabile due volte e che la sua derivata seconda si ottiene derivando due volte la serie di potenze in partenza. E così via, per induzione. Abbiamo quindi il seguente importante corollario.

Corollario 1 *Sia $f(x)$ la somma della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avente raggio di convergenza $R > 0$. Allora $f \in C^\infty(]-R, R[)$. Inoltre, per ogni $k \in \mathbb{N}$, la derivata di ordine k di f si ottiene derivando la serie termine a termine k volte, cioè*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k} = k! a_k + k! a_{k+1} x + \cdots,$$

per ogni $x \in]-R, R[$.

I risultati mostrati riguardano la regolarità della funzione somma di una serie di potenze all'interno dell'intervallo di convergenza. Cosa si può dire in un punto al bordo, supposto ovviamente che la serie sia ivi convergente? La risposta è contenuta nel seguente Teorema.

Teorema 3 (Abel) *Supponiamo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ abbia raggio di convergenza finito $R > 0$. Supponiamo inoltre che la serie converga per $x = R$ (risp. per $x = -R$). Allora, denotata con f la sua somma, risulta che f è continua a sinistra nel punto R (risp. continua a destra in $x = -R$) e*

$$f(R) = \lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n,$$

$$(risp. f(-R) = \lim_{x \rightarrow -R^+} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n).$$

Osservazione 4 Ovviamente il Teorema 2, il Corollario 1 e il Teorema di Abel continuano a valere anche per serie di potenze centrate in un generico punto x_0 .

Infatti, data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$, convergente in $]x_0 - R, x_0 + R[$, con il cambio di variabile $y = x - x_0$, essa può essere trasformata nella serie centrata nell'origine $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$, $y \in]-R, R[$.

Usiamo ora questi risultati per ricavare alcuni sviluppi di funzioni elementari in serie di potenze. La serie integrata della serie geometrica (1.2) è

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 1$$

la cui somma è data da

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\log(1-x), \quad |x| < 1.$$

Quindi

$$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m}, \quad x \in]-1, 1[. \quad (1.9)$$

Osserviamo che la serie in (1.9) converge anche per $x = -1$ (per il criterio di Leibniz). Quindi la serie integrata non ha lo stesso insieme di convergenza della serie di partenza. Usando il Teorema di Abel ricaviamo anche

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Abbiamo così determinato la somma della serie armonica a segni alterni. Scambiando x con $-x$ in (1.9):

$$\log(1+x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad |x| < 1. \quad (1.10)$$

Se invece mettiamo $-x^2$ al posto di x in (1.2) otteniamo

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Passando alla serie integrata troviamo

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1. \quad (1.11)$$

Per verifica diretta, la serie precedente converge anche per $x = \pm 1$, per cui (sempre dal Teorema di Abel) lo sviluppo di $\arctan x$ vale per $|x| \leq 1$.

Concludiamo questa sezione osservando che in tutte le espressioni (1.9), (1.10) e (1.11) le funzioni somma $\log(1-x)$, $\log(1+x)$, $\arctan x$ sono definite anche per valori di x al di fuori dell'insieme di convergenza. Tuttavia gli sviluppi in serie di potenze valgono *solo* negli intervalli indicati. Per esempio, $\arctan x$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma è sviluppabile in serie di potenze con centro in 0 solo per $x \in [-1, 1]$.

2 Serie e polinomi di Taylor

2.1 Serie di Taylor

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, I un intervallo aperto contenente x_0 e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione avente le derivate di tutti gli ordini in x_0 . Si chiama **serie di Taylor di f di centro x_0** la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots \quad (2.1)$$

Se $x_0 = 0$, la serie precedente diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots \quad (2.2)$$

e prende il nome di **serie di MacLaurin di f** .

In quanto serie di potenze, la serie (2.1) converge sicuramente per $x = x_0$ (alla somma $f(x_0)$). Se (2.1) converge per qualche $x \neq x_0$, è vero che la somma è $f(x)$? In generale no!

Esempio 4 Consideriamo la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si può dimostrare che f ha tutte le derivate nulle in $x = 0$, cioè $f^{(n)}(0) = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi la sua serie di MacLaurin è $\sum_{n=0}^{+\infty} 0 \cdot x^n \equiv 0$ e dunque converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ma converge a $f(x)$ solo se $x = 0$.

Nella sezione precedente (Teorema 2 e Osservazione 4) abbiamo visto che se f è la somma di una serie di potenze di centro x_0 e raggio di convergenza $R > 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (2.3)$$

allora $f \in C^\infty]x_0 - R, x_0 + R[$ e la sua derivata di ordine k si ottiene derivando k volte la serie, cioè

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k} \\ &= k! a_k + k! a_{k+1} (x - x_0) + \cdots \quad x \in]x_0 - R, x_0 + R[. \end{aligned}$$

Se prendiamo $x = x_0$, allora otteniamo $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$, da cui

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Quindi la serie di potenze in (2.3) è proprio la serie di Taylor di f di centro x_0 . Vediamo lo **sviluppo in serie di MacLaurin di e^x** .

Esempio 5 Abbiamo già visto che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ ha raggio di convergenza $R = +\infty$. È immediato riconoscere che tale serie è la serie di MacLaurin di e^x . Si tratta quindi di provare che la sua somma è proprio e^x . Denotata con f la somma della serie, per il Corollario 1, f è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Inoltre, applicando il Teorema 2, abbiamo che

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!} = f(x).$$

Siccome $f(0) = 1$, abbiamo trovato che f risolve il problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} f'(x) = f(x), \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

D'altra parte, tale problema ammette come *unica* soluzione e^x . Quindi $f(x) = e^x$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Abbiamo così provato lo sviluppo notevole

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Analogamente si può provare (derivando due volte le serie al secondo membro) che sussistono i seguenti sviluppi

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Dallo sviluppo (2.4) e dalla Proposizione 1 (b), si ricavano poi

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n!} x^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

2.2 Polinomi di Taylor

Siano I un intervallo aperto di $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione avente tutte le derivate fino all'ordine n in x_0 . Si definisce **polinomio di Taylor di f di centro x_0 e ordine n** il seguente polinomio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad (2.7)$$

di grado $\leq n$. Se $x_0 = 0$, allora parleremo di **polinomio di MacLaurin di f di ordine n** .

Osservazione 5 Se la funzione f è di classe $C^\infty(I)$, allora esistono i polinomi di Taylor di f di centro x_0 di tutti gli ordini. Essi sono le somme parziali della serie di Taylor di f di centro x_0 (2.1).

Derivando ripetutamente il polinomio (2.7) e valutandone le derivate successive in x_0 si trova

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= f(x_0), \\ P'_n(x_0) &= f'(x_0), \\ P''_n(x_0) &= f''(x_0), \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Pertanto P_n è, tra tutti i polinomi di grado minore o uguale a n , quello che meglio approssima la funzione f vicino a x_0 . Più precisamente, si può provare il seguente risultato.

Proposizione 2 *Si ha*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

La funzione

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

si chiama **resto n-simo** e rappresenta l'errore di approssimazione che si compie nel sostituire P_n a f . La proposizione precedente afferma che, per $x \rightarrow x_0$,

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n),$$

(formula di Taylor con resto di Peano) e quindi

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$$

per “ x vicino a x_0 ”. Se $n = 1$, ricordando che $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ rappresenta l'equazione della retta tangente al grafico di f in x_0 , abbiamo

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)} + o(x - x_0),$$

cioè, in un intorno di x_0 , il grafico di f si approssima con quello della tangente a meno di un errore che è un infinitesimo di ordine superiore a $x - x_0$. Se $n = 2$ e $f''(x_0) \neq 0$, il grafico di $P_2(x)$, cioè la curva di equazione $y = P_2(x)$, è una parabola che migliora l'approssimazione del grafico di f vicino a x_0 . E così via.

È utile a volte avere il resto in una forma diversa, più esplicita.

Proposizione 3 (Formula di Taylor con resto di Lagrange) Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^{n+1}(I)$ e sia $x_0 \in I$. Allora, per ogni $x \in I$ esiste c compreso tra x e x_0 tale che

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}.$$

Osservazione 6 Per $n = 0$, la proposizione precedente si riduce al Teorema di Lagrange. Si noti, inoltre, quanto il resto di Lagrange sia simile all'ultimo addendo del polinomio $P_{n+1}(x)$.

Torniamo al problema della sviluppabilità di una funzione f di classe C^∞ in serie di Taylor. Nella sottosezione precedente abbiamo visto che dal fatto di poter scrivere la serie di Taylor di una funzione non segue necessariamente che la serie converge alla funzione stessa (si veda l'Esempio 4). Vediamo allora come si perviene a delle condizioni che assicurano la convergenza a f della sua serie di Taylor. Siano $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^\infty(I)$, $x_0 \in I$. Siccome

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad x \in I, \quad n \in \mathbb{N}$$

e $P_n(x)$ è la somma parziale n -sima della serie di Taylor di f di centro x_0 (Osservazione 5), risulta che *la serie di Taylor di f di centro x_0 converge a f se e solo se*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0, \quad \text{per ogni } x \in I. \quad (2.9)$$

Prendendo il resto di Lagrange, si possono ottenere delle condizioni sulle derivate di ogni ordine di f affinché risulti verificata la condizione (2.9). Tuttavia non vedremo in dettaglio questo argomento.

Esercizio 1 *Trovare il polinomio di MacLaurin di ordine 6 della funzione $\sin(2x)$.*

Soluzione. Ricordando lo sviluppo (2.5) si ha che

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= 2x - \frac{2^3}{3!} x^3 + \frac{2^5}{5!} x^5 - \frac{2^7}{7!} x^7 + \dots\end{aligned}$$

Quindi, il polinomio richiesto, $P_6(x)$ è

$$P_6(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5.$$

Si noti che ha grado 5 e che coincide con il polinomio $P_5(x)$.

Esercizio 2 *Trovare il polinomio di MacLaurin di ordine 10 della funzione $x^2 \cos(3x^3)$.*

Esercizio 3 *Sia $f(x) = x^4 \cos(3x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Sia $P(x)$ il polinomio di Taylor di f di centro $x_0 = \sqrt{\pi}$ e ordine 10.000. Quanto vale $P(\sqrt{\pi})$?*

Soluzione. Ricordando la prima delle identità (2.8), abbiamo semplicemente che $P(\sqrt{\pi}) = f(\sqrt{\pi}) = -\pi^2$.