1 Criterio di confronto tra serie e integrale

Teorema 1 *Sia* $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione positiva e decrescente. Allora la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{1.1}$$

e l'integrale

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx, \tag{1.2}$$

convergono o divergono simultaneamente.

DIM: Introduciamo le somme parziali della serie (1.1)

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} f(n), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Siccome la serie è a termini positivi, risulta che la successione $\{s_k\}$ ammette limite, con

$$\lim_{k\to+\infty} s_k = s \in]0, +\infty].$$

Per la stessa ragione, abbiamo che

$$\lim_{k\to+\infty} \int_1^k f(x)\, dx = \int_1^{+\infty} f(x)\, dx \tag{1.3}$$

dove il secondo membro può essere un numero positivo o $+\infty$. Si noti che f è integrabile in un intervallo limitato perché è decrescente. Quindi, la serie (1.1) e l'integrale (1.2) sono ben definiti. Osserviamo che, per la proprietà di additività dell'integrale, possiamo scrivere

$$\int_1^k f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{k-1} \int_n^{n+1} f(x)\, dx. \tag{1.4}$$

Grazie all'ipotesi che f è decrescente, abbiamo che

$$\forall\, x \in [n, n+1] \ : n \le x \le n+1 \quad \Rightarrow \quad f(n+1) \le f(x) \le f(n)$$

e quindi, usando la monotonia dell'integrale,

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\, dx \le \int_n^{n+1} f(x)\, dx \le \int_n^{n+1} f(n)\, dx.$$

Ora, siccome nei due integrali agli estremi la funzione integranda è costante, possiamo calcolarli esplicitamente e avere che

$$f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)\, dx \le f(n).$$

Sommando per $n = 1, 2, ..., k-1$ e ricordando (1.4), abbiamo

$$\sum_{n=1}^{k-1} f(n+1) \leq \int_1^k f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{k-1} f(n). \tag{1.5}$$

Osserviamo che $\displaystyle\sum_{n=1}^{k-1} f(n) = s_{k-1}$, mentre, con un cambiamento dell'indice di somma troviamo

$$\sum_{n=1}^{k-1} f(n+1) \overset{m=n+1}{=} \sum_{m=2}^{k} f(m) = s_k - f(1).$$

La stima (1.5) diventa quindi

$$s_k - f(1) \leq \int_1^k f(x)\,dx \leq s_{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

da cui, passando al limite per $k \to \infty$, otteniamo che

$$s - f(1) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq s,$$

che dimostra che s è finita se e solo se l'integrale improprio è finito. □

Applichiamo il criterio precedente allo studio della **serie armonica generalizzata** o **p-serie**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}, \tag{1.6}$$

dove $p > 0$. Se $p \leq 0$, il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie non converge. Allora, trattandosi di una serie a termini positivi, essa diverge. Supponiamo dunque che $p > 0$. La funzione $f(x) = \frac{1}{x^p}$, definita in $[1, +\infty[$, è decrescente e positiva. Quindi, per il Teorema 1, la serie (1.6) converge se e solo se converge l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx.$$

Questo converge se e solo se $p > 1$. Abbiamo così provato che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \qquad \begin{cases} \text{converge} & \text{se } p > 1; \\ \text{diverge a} + \infty & \text{se } p \leq 1. \end{cases}$$