

1. Sia  $s$  la somma della serie convergente  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8(-1)^{n+1} 2^{-2n} \pi^{2n}}{(2n+1)!}$ .

Allora  $2\pi s$  vale

2. Quali sono **tutti e soli** gli  $x \in \mathbf{R}$  per cui converge

la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^{2x-14}}$  ?

3. Sia  $g(x) = 3 \cos(x^4) + \ln(1 + 3x^6)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ . Sia  $P_{10}(x)$  il polinomio di Mac Laurin di ordine 10 della funzione  $g$ . Allora  $P'_{10}(1)$  vale

4. Sia  $I$  l'intervallo costituito da tutti e soli gli  $x \in \mathbf{R}$  per cui converge

la serie di potenze reali  $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)4^{-2n}(x+1)^{n+2}$ . Allora  $2 \sup I + \inf I$  vale

5. Sia  $f(x, y) = 5x^2 e^{-5y} + x \sin(5y)$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ .

Allora  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0)$  vale

6. Sia  $f(x, y) = 6x^2 + y^3$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Sia  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\frac{3}{\sqrt{5}}, -1)$  la derivata direzionale di  $f$  nel punto  $(x_0, y_0) = (\frac{3}{\sqrt{5}}, -1)$  secondo il versore  $\vec{u} = \frac{1}{3}(\sqrt{5}\vec{i} + 2\vec{j})$ .

Allora  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\frac{3}{\sqrt{5}}, -1)$  vale

- 
- Per ognuna delle 12 domande : 2 punti, se la risposta è esatta ; 0 punti, se la risposta è sbagliata o non è data.
  - La prova è superata e lo Studente è ammesso alla prova orale, se il punteggio totale così ottenuto è maggiore o uguale di 18 punti (cioè se le risposte esatte sono almeno 9).
  - Tempo a disposizione: 2 ore .

7. Si consideri, per ogni  $\alpha \in \mathbf{R}$ , il campo vettoriale  $\vec{F}(x, y) = (-2 \cos(2x + y^2) + \alpha \sin(2x)) \vec{i} + (2 \sin(2y) + (2 - \frac{\alpha}{2})y \cos(2x + y^2)) \vec{j}$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Qual'è l'unico  $\alpha \in \mathbf{R}$  per cui  $\vec{F}(x, y)$  è conservativo (cioè ammette potenziale) in tutto  $\mathbf{R}^2$ ? 8
8. Si consideri, nel piano  $xy$ , la curva  $C$  data da  $\vec{r}(t) = \sin t \vec{i} + 7 \cos t \vec{j}$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ . Sia  $\vec{F}(x, y) = -7y \vec{i} + 7x \vec{j}$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Si consideri l'integrale di linea  $J = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Allora  $\frac{2J}{\pi}$  vale -49
9. Sia  $S$  la superficie totale del solido  $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0; 0 \leq z \leq 3\}$ . Sia  $\vec{n}(x, y, z)$  il versore normale esterno a  $S$  nel generico punto  $(x, y, z) \in S$ . Sia  $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 + 3x) \vec{i} + (z - xy^2) \vec{j} + (3 \sin y + z) \vec{k}$ ,  $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ . Sia  $J = \iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z) dS$ . Allora  $\frac{J}{\pi}$  vale 6  
(N.B. Si consiglia di usare il teorema della divergenza in  $\mathbf{R}^3$ .)
10. Sia  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1; y \leq 0\}$ . Sia  $C$  la curva-bordo di  $D$ , percorsa tutta una sola volta in senso antiorario. Sia  $\vec{F}(x, y) = x^5 y^2 \vec{i} + 5xy \vec{j}$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Sia  $J = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Allora  $6J$  vale -20  
(N.B. Si consiglia di usare il teorema di Green (o di Stokes) in  $\mathbf{R}^2$ .)
11. Sia  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Sia  $Q = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 4; |y| \leq 4; (x, y) \notin T\}$ , dove  $T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1; |y| < 1\}$ . Sia  $M$  il valore massimo assoluto assunto dalla restrizione della funzione  $f$  a  $Q$ ; sia  $m$  il valore minimo assoluto assunto dalla restrizione della funzione  $f$  a  $Q$ . Allora  $\frac{M}{4} + 4m$  vale 12
12. Si consideri, nel piano  $xy$ , il triangolo  $T$ , di vertici i punti  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ . Sia  $C$  la curva-bordo di  $T$ . Sia  $\vec{n}(x, y)$  il versore normale esterno a  $C$  nel generico punto  $(x, y) \in C$ . Sia  $\vec{F}(x, y) = 6xy^3 \vec{i} + (y^2 - 6xy) \vec{j}$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Sia  $I = \oint_C \vec{F}(x, y) \cdot \vec{n}(x, y) ds$ . Allora  $9I$  vale -18  
(N.B. Si consiglia di usare il teorema della divergenza in  $\mathbf{R}^2$ .)

- Per ognuna delle 12 domande : 2 punti, se la risposta è esatta ; 0 punti, se la risposta è sbagliata o non è data.
- La prova è superata e lo Studente è ammesso alla prova orale, se il punteggio totale così ottenuto è maggiore o uguale di 18 punti (cioè se le risposte esatte sono almeno 9).
- Tempo a disposizione: 2 ore .