

1. Sia $f(x, y) = x^3 e^{-5y}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sia $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 0)$ la derivata direzionale di f nel punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$ secondo il versore $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2\vec{i} - 3\vec{j})$. Allora $\sqrt{13} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 0)$ vale 21

2. Sia $f(x, y) = 4xy^4 + y^2 \sin(4x)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Allora $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, -1) =$ -24

3. Sia I l'intervallo costituito da tutti e soli gli $x \in \mathbb{R}$ per cui converge la serie di potenze reali $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2(x-3)^n}{n+3}$. Allora $\sup I + 3 \inf I$ vale 10

4. Sia s la somma della serie convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{7}{12}\right)^n$. Allora $\frac{12}{s}$ vale 19

5. Sia $g(x) = \frac{1}{2} \cos(2x^2) - 2x^6$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sia $P_7(x)$ il polinomio di Mac Laurin di ordine 7 della funzione g . Allora $P_7'(-1)$ vale 16

6. Quali sono tutti e soli gli $x \in \mathbb{R}$ per cui converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{x^2-1}}{(n+1)^{49}}$? -7 < x < 7

-
- Per ognuna delle 12 domande : 2 punti, se la risposta è esatta ; 0 punti, se la risposta è sbagliata o non è data.
 - La prova è superata e lo Studente è ammesso alla prova orale, se il punteggio totale così ottenuto è maggiore o uguale di 18 punti (cioè se le risposte esatte sono almeno 9).
 - Tempo a disposizione: 2 ore .

7. Sia $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4; x \geq 0\}$. Sia C la curva-bordo di Q , percorsa tutta una sola volta in senso antiorario. Sia $\vec{F}(x, y) = 6y^4\vec{i} + (y^2 - 6x^2)\vec{j}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Sia $I = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Allora $\frac{3I}{4}$ vale -42

(N.B. Si consiglia di usare il teorema di Green (o di Stokes) in \mathbb{R}^2 .)

8. Si consideri, nel piano xy , il triangolo T , di vertici i punti $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$.

Sia C la curva-bordo di T . Sia $\vec{n}(x, y)$ il versore normale esterno a C nel generico punto $(x, y) \in C$. Sia $\vec{F}(x, y) = x^2y\vec{i} + 7xy\vec{j}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Sia $I = \oint_C \vec{F}(x, y) \cdot \vec{n}(x, y) ds$. Allora $6I$ vale 28

(N.B. Si consiglia di usare il teorema della divergenza in \mathbb{R}^2 .)

9. Sia $f(x, y) = 5 + x^5 - 5x - y^3 + 3y$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sia (x_0, y_0) l'unico punto di massimo relativo della funzione f . Allora $f(x_0, y_0)$ vale 11

10. Sia S la superficie totale del cono circolare retto V , di vertice $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 4)$ e di base $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sia $\vec{n}(x, y, z)$ il versore normale esterno a S nel generico punto $(x, y, z) \in S$. Sia $\vec{F}(x, y, z) = (4x^4 + z^2)\vec{i} + (\cos x - 4y)\vec{j} + z(y - 1)\vec{k}$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Sia $J = \iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z) dS$. Allora $\frac{3J}{\pi}$ vale -20

(N.B. Si consiglia di usare il teorema della divergenza in \mathbb{R}^3 .)

11. Si consideri, nel piano xy , la curva C data da $\vec{r}(t) = t\vec{i} + e^{2t}\vec{j}$, $0 \leq t \leq 1$.

Sia $\vec{F}(x, y) = 2x^2\vec{i} + xy^{-1}\vec{j}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. Si consideri l'integrale di linea $J = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Allora $6J$ vale 10

12. Si consideri, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, il campo vettoriale $\vec{F}(x, y) = (\alpha \cos(3x) + 4xe^{-3y^3})\vec{i} + (3y^4 - 2\alpha x^2 y^2 e^{-3y^3})\vec{j}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Qual'è l'unico $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il campo $\vec{F}(x, y)$ è conservativo (cioè ammette potenziale) in tutto \mathbb{R}^2 ? $\alpha = 9$

- Per ognuna delle 12 domande : 2 punti, se la risposta è esatta ; 0 punti, se la risposta è sbagliata o non è data.
- La prova è superata e lo Studente è ammesso alla prova orale, se il punteggio totale così ottenuto è maggiore o uguale di 18 punti (cioè se le risposte esatte sono almeno 9).
- Tempo a disposizione: 2 ore .