

1. Sia s la somma della serie convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8(-1)^{n+1} 2^{-2n} \pi^{2n}}{(2n+1)!}$.

Allora $2\pi s$ vale

-32

2. Quali sono **tutti e soli** gli $x \in \mathbf{R}$ per cui converge

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^{2x-14}}$?

$x > 8$

3. Sia $g(x) = 3 \cos(x^4) + \ln(1 + 3x^6)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Sia $P_{10}(x)$ il polinomio di Mac Laurin di ordine 10 della funzione g . Allora $P'_{10}(1)$ vale

6

4. Sia I l'intervallo costituito da tutti e soli gli $x \in \mathbf{R}$ per cui converge

la serie di potenze reali $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)4^{-2n}(x+1)^{n+2}$. Allora $2 \sup I + \inf I$ vale

13

5. Sia $f(x, y) = 5x^2 e^{-5y} + x \sin(5y)$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Allora $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0)$ vale

-45

6. Sia $f(x, y) = 6x^2 + y^3$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$. Sia $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\frac{3}{\sqrt{5}}, -1)$ la derivata direzionale di f nel punto $(x_0, y_0) = (\frac{3}{\sqrt{5}}, -1)$ secondo il versore $\vec{u} = \frac{1}{3}(\sqrt{5}\vec{i} + 2\vec{j})$.

Allora $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\frac{3}{\sqrt{5}}, -1)$ vale

14

-
- Per ognuna delle 12 domande : 2 punti, se la risposta è esatta ; 0 punti, se la risposta è sbagliata o non è data.
 - La prova è superata e lo Studente è ammesso alla prova orale, se il punteggio totale così ottenuto è maggiore o uguale di 18 punti (cioè se le risposte esatte sono almeno 9).
 - Tempo a disposizione: 2 ore .

7. Si consideri, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, il campo vettoriale $\vec{F}(x, y) = (-2 \cos(2x + y^2) + \alpha \sin(2x)) \vec{i} + (2 \sin(2y) + (2 - \frac{\alpha}{2})y \cos(2x + y^2)) \vec{j}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Qual'è l'unico $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\vec{F}(x, y)$ è conservativo (cioè ammette potenziale) in tutto \mathbb{R}^2 ?

8

8. Si consideri, nel piano xy , la curva C data da $\vec{r}(t) = \sin t \vec{i} + 7 \cos t \vec{j}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Sia $\vec{F}(x, y) = -7y \vec{i} + 7x \vec{j}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si consideri l'integrale di linea $J = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Allora $\frac{2J}{\pi}$ vale

-49

9. Sia S la superficie totale del solido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0; 0 \leq z \leq 3\}$.

Sia $\vec{n}(x, y, z)$ il versore normale esterno a S nel generico punto $(x, y, z) \in S$.

Sia $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 + 3x) \vec{i} + (z - xy^2) \vec{j} + (3 \sin y + z) \vec{k}$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Sia $J = \iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z) dS$. Allora $\frac{J}{\pi}$ vale

6

(N.B. Si consiglia di usare il teorema della divergenza in \mathbb{R}^3 .)

10. Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1; y \leq 0\}$. Sia C la curva-bordo di D , percorsa tutta una sola volta in senso antiorario. Sia $\vec{F}(x, y) = x^5 y^2 \vec{i} + 5xy \vec{j}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Sia $J = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Allora $6J$ vale

-20

(N.B. Si consiglia di usare il teorema di Green (o di Stokes) in \mathbb{R}^2 .)

1. Sia $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sia $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 4; |y| \leq 4; (x, y) \notin T\}$, dove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1; |y| < 1\}$. Sia M il valore massimo assoluto assunto dalla restrizione della funzione f a Q ; sia m il valore minimo assoluto assunto

dalla restrizione della funzione f a Q . Allora $\frac{M}{4} + 4m$ vale

12

2. Si consideri, nel piano xy , il triangolo T , di vertici i punti $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$.

Sia C la curva-bordo di T . Sia $\vec{n}(x, y)$ il versore normale esterno a C

nel generico punto $(x, y) \in C$. Sia $\vec{F}(x, y) = 6xy^3 \vec{i} + (y^2 - 6xy) \vec{j}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Sia $I = \oint_C \vec{F}(x, y) \cdot \vec{n}(x, y) ds$. Allora $9I$ vale

-18

(N.B. Si consiglia di usare il teorema della divergenza in \mathbb{R}^2 .)

- Per ognuna delle 12 domande : 2 punti, se la risposta è esatta ; 0 punti, se la risposta è sbagliata o non è data.
- La prova è superata e lo Studente è ammesso alla prova orale, se il punteggio totale così ottenuto è maggiore o uguale di 18 punti (cioè se le risposte esatte sono almeno 9).
- Tempo a disposizione: 2 ore .