ESERCIZIO 1

È conveniente il cambio di variabile $y = x^2$

La serie da studiare diventa $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{y^k}{(k+1)!}$.

Applicando il criterio del rapporto con $a_k = \frac{1}{(k+1)!}$ si trova:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!}{(k+2)!} = \frac{(k+1)!}{(k+1)!\,(k+2)} = \frac{1}{k+2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Pertanto $R = +\infty$. Quindi entrambe le serie (quella in y e quella in x) convergono in $\mathbb{R}$.

Per determinare la somma, poniamo $n = k+1$

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{y^k}{(k+1)!} = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{y^{n-1}}{n!} = y^{-1} \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} =$$

$$= \frac{1}{y}\left(e^y - 1 - y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3!}\right)$$

Quindi $$f(x) = \frac{1}{x^2}\left(e^{x^2} - 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}\right)$$

ESERCIZIO 2

Proviamo che $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

Questo prova che f è continua in $(0,0)$.

Passando alle coordinate polari:

$$\left| \frac{\rho^4 \cos^4\theta - \rho^3 \sin^3\theta}{\rho^2} \right| = |\rho^2 \cos^4\theta - \rho \sin^3\theta| \leq$$

$$\leq \rho^2 \cos^4\theta + \rho\, |\sin^3\theta| \underset{\substack{|\cos\theta| \leq 1 \\ |\sin\theta| \leq 1}}{\uparrow\leq} \rho^2 + \rho \quad .$$

La funzione $g(\rho) = \rho^2 + \rho$ è indipendente da θ e tende a 0 per $\rho \to 0^+$. Pertanto $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$.

Per discutere l'esistenza di $\nabla f(0,0)$, occorre utilizzare la definizione di derivata parziale. Pertanto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx} f(x,0) \Big|_{x=0} = \frac{d}{dx} x^2 \Big|_{x=0} = 2x \Big|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dy} f(0,y) \Big|_{y=0} = \frac{d}{dy}(-y) \Big|_{y=0} = -1 \Big|_{y=0} = -1$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, \nabla f(0,0) = (0,-1)$$

ESERCIZIO 3

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3(x-1)^2 - 2y = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 3(x-1)^2 \\[2ex] 2y = 2x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x-1)^2 = 2(x-1) \\[2ex] y = x - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 & \vee \quad 3(x-1)=2 \\ y=x-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$$ pti critici

$$\mathcal{H}f(x,y)=\begin{pmatrix} 6(x-1) & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}f(1,0)=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$ det $<0 \Rightarrow (1,0)$ pto di sella

$$\mathcal{H}f\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$ def. pos. $\Rightarrow \left(\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$ pto di minimo

ESERCIZIO 4

Occorre calcolare l'integrale triplo della funzione 1 sulla regione considerata:

$$\iiint_V 1\, dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_0^{4-(x^2+y^2)} dz \right) dx\,dy =$$

$$D=\{(x,y) \mid (x+1)^2+y^2 \leq 1\}$$

$$= \iint_D \left[4-(x^2+y^2)\right] dx\,dy$$ $$\begin{cases} x=-1+\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

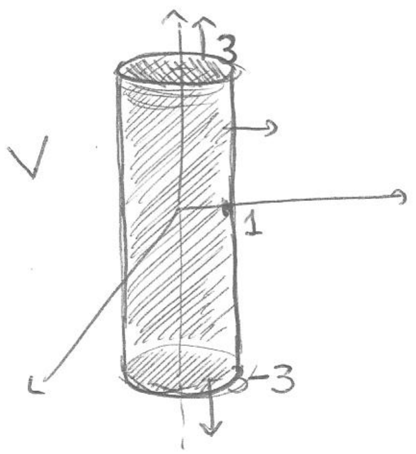
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[4-(\rho^2\cos^2\theta+1-2\rho\cos\theta)-\rho^2\sin^2\theta\right]\rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3\rho-\rho^3+2\rho^2\cos\theta)\, d\rho\, d\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^1 (3\rho-\rho^3)\, d\rho = 2\pi\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2}\pi$$

ESERCIZIO 5

Per il flusso uscente da V applichiamo il teor. della divergenza.



$$\iiint_V (1+z^2+e^z)\, dx\, dy\, dz = \int_{-3}^{3}\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} (1+z^2+e^z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \pi\int_{-3}^{3} 1+z^2+e^z = \pi\left(6+2\cdot 9+e^3-e^{-3}\right) =$$

$$= 24\pi + e^3\pi - e^{-3}\pi$$

Il flusso attraverso la sup. laterale si ottiene per differenza.

flusso uscente dalla base contenuta in $z=3$:

$$\hat{n}_e = \hat{k} \Rightarrow F\cdot\hat{k} = F_3 \Rightarrow \iint_{\Sigma_1} \vec{F}\cdot\hat{k}\,dS = \iint_{\substack{\{x^2+y^2\leq 1\}\\ z=3}} e^3\,dx\,dy = \pi e^3$$

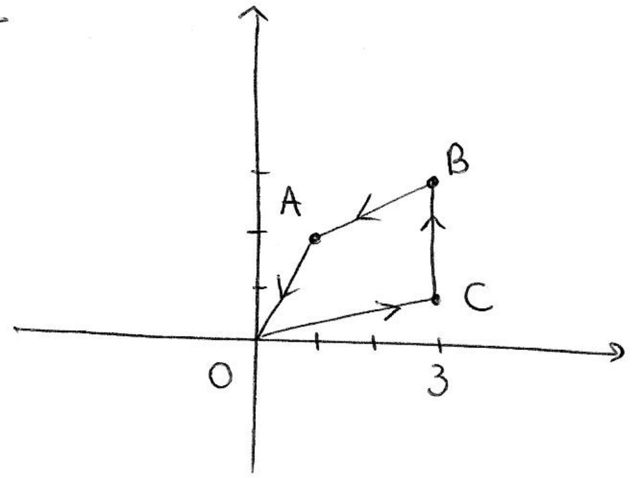
flusso uscente dalla base contenuta in $z=-3$

$$\hat{n}_e = -\hat{k} \Rightarrow \vec{F}\cdot(-\hat{k}) = -F_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma_1} -\vec{F}\cdot\hat{k}\,dS = -\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ z=-3}} e^{-3}\,dx\,dy = -e^{-3}\pi$$

$$\text{flusso richiesto} = 24\pi + \cancel{e^3\pi} - \cancel{e^{-3}\pi} - \cancel{e^3\pi} + \cancel{e^{-3}\pi} = 24\pi$$

ESERCIZIO 6



Ricordiamo la parametrizzazione standard del segmento orientato da P a Q : $\vec{r}(t) = P + t(Q-P)$ $t\in[0,1]$

Quindi

segmento $\overrightarrow{OC}$: $\vec{r}_1(t) = O + t(C-O) = tC = (3t, t)$ $t\in[0,1]$

segmento $\overrightarrow{CB}$: $\vec{r}_2(t) = C + t(B-C) =$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (3, 1+2t) \qquad t \in [0,1]$$

Per scrivere una parametrizzazione di ∂Q occorre incollare le curve regolari relative ai singoli segmenti:

Poniamo $\quad t' = t+1 \Rightarrow t' \in [1,2]$ se $t \in [0,1]$

e $\vec{r}_2(t') = (3, 1+2t'-2) = (3, 2t'-1) \qquad t' \in [1,2]$

Segmento $\overrightarrow{CA}$: $\vec{r}_3(t) = C + t(A-C) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$

$t' = t+2 \Rightarrow t' \in [2,3]$ e

$$\vec{r}_3(t') = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (t'-2)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t'+7 \\ t'-1 \end{pmatrix} \quad t' \in [2,3]$$

Segmento $\overrightarrow{AO}$: $\vec{r}_4(t) = A + t(O-A) = (1-t)A \qquad t \in [0,1]$

$t' = t+3 \Rightarrow t' \in [3,4]$ e

$$\vec{r}_4(t') = (1-t'+3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-t' \\ 8-2t' \end{pmatrix}$$

In definitiva:

$$\vec{r}(\tau) = \begin{cases} \vec{r}_1(\tau) = (3\tau, \tau) & \tau \in [0,1] \\ \vec{r}_2(\tau) = (3, 2\tau-1) & \tau \in [1,2] \\ \vec{r}_3(\tau) = (7-2\tau, \tau-1) & \tau \in [2,3] \\ \vec{r}_4(\tau) = (4-\tau, 8-2\tau) & \tau \in [3,4] \end{cases}$$

$\int_{\partial Q} x \, ds =$ è un integrale di prima specie;
posso usare le parametrizzazioni riferite a $[0,1]$ perchè l'integrale non dipende dalla parametrizzazione (purchè congruente)

$$= \int_0^1 3t\sqrt{9+1}\,dt + \int_0^1 3\cdot 2\,dt + \int_0^1 (3-2t)\sqrt{5}\,dt + \int_0^1 (1-t)\sqrt{5}\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{10} + 6 + 3\sqrt{5} - \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{10} + 6 + \frac{5}{2}\sqrt{5}$$

L'integrale non cambia se ∂Q viene percorsa in verso opposto.