I Teoremi di Green, della divergenza (o di Gauss) e di Stokes

1 In $\mathbb{R}^2$

Sia D un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^2$ semplice rispetto ad entrambi gli assi cartesiani con ∂D costituita dall'unione di un numero finito di (sostegni di) curve regolari. Diciamo che la frontiera di D, ∂D, è *orientata positivamente* se è fissato il verso di percorrenza antiorario. Con questa scelta i punti di D restano sempre a sinistra di ∂D. In tal caso scriveremo ∂D^+.

Teorema 1 (Teorema di Green) *Sia D un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^2$ con le proprietà elencate sopra e sia $\mathbf{F}(x,y) = F_1(x,y)\hat{\imath} + F_2(x,y)\hat{\jmath}$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$, con A aperto contenente D. Allora vale la formula*

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\partial D^+} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}. \tag{1}$$

Dimostrazione. Siccome D è semplice rispetto all'asse y, possiamo scrivere

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

con g_1, g_2 funzioni di classe $C^1([a,b])$. Calcoliamo la circuitazione del campo $\mathbf{G} = F_1\hat{\imath}$ lungo ∂D^+. La frontiera di D è costituita dai grafici delle funzioni g_1, g_2 intervallati da due segmenti verticali γ_1, γ_2. Quindi

$$\oint_{\partial D^+} \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\tau} = \int_{\mathrm{Graf}(g_1)} \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_{\gamma_1} \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_{\mathrm{Graf}(g_2)} \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_{\gamma_2} \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\tau}$$

Sui segmenti verticali, i vettori tangenti $\overrightarrow{\gamma}_i'(t)$, $i = 1,2$ sono diretti verticalmente, mentre il campo $\mathbf{G}$ è diretto orizzontalmente. Pertanto il prodotto scalare $\mathbf{G} \cdot \overrightarrow{\gamma}_i'$ è nullo. Ciò implica che

$$\int_{\gamma_i} \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\tau} = \int_0^1 \mathbf{G}(\gamma_i(t) \cdot \overrightarrow{\gamma}_i'(t) dt = 0.$$

Calcoliamo esplicitamente gli altri due integrali. Una parametrizzazione del grafico di g_1 è $(t, g_1(t))$, $t \in [a,b]$. Pertanto

$$\int_{\mathrm{Graf}(g_1)} \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\tau} = \int_a^b \mathbf{G}(t, g_1(t)) \cdot (1, g_1'(t)) dt = \int_a^b F_1(t, g_1(t)) dt.$$

Per l'integrale sul grafico di g_2 il calcolo è lo stesso, a meno del fatto che tale grafico è percorso nel verso opposto, per cui

$$\int_{\mathrm{Graf}(g_2)} \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\tau} = -\int_a^b F_1(t, g_2(t)) dt.$$

Sommando tutti i contributi abbiamo

$$\oint_{\partial D^+} \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\tau} = \int_a^b \Big(F_1(t, g_1(t)) - F_1(t, g_2(t))\Big) dt. \tag{2}$$

D'altra parte, se scriviamo il primo membro di (1) per il campo $\mathbf{G}$, tenendo conto della forma di D abbiamo

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) dxdy &= \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} -\frac{\partial F_1}{\partial y} dy\right) dx \\ &= \int_a^b \Big(-F_1(x, g_2(x)) + F_1(x, g_1(x))\Big) dx, \end{aligned} \tag{3}$$

avendo usato il Teorema fondamentale del calcolo integrale nell'ultimo passaggio. Confrontando (2) e (3), risulta che il campo $\mathbf{G}$ soddisfa la tesi del teorema.

Siccome D è semplice anche rispetto all'asse x, si può ripetere lo stesso ragionamento per il campo $\tilde{\mathbf{G}} = F_2\hat{\jmath}$ tenendo conto stavolta dell'espressione di D come insieme semplice rispetto all'asse x. Si arriva così a provare la formula del teorema anche per $\tilde{\mathbf{G}}$. In definitiva abbiamo

$$\iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\partial D^+} \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\tau}.$$

e

$$\iint_D \left(\frac{\partial \tilde{G}_2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{G}_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\partial D^+} \tilde{\mathbf{G}} \cdot \boldsymbol{\tau}.$$

Infine, siccome $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \tilde{\mathbf{G}}$ e siccome l'integrale e la derivata sono lineari, sommando membro a membro le due formule precedenti troviamo la tesi. ■

Definizione 1 *Diciamo che un insieme limitato D contenuto in $\mathbb{R}^2$ è* **decomponibile** *se è possibile ripartirlo nell'unione di un numero finito di insiemi semplici rispetto ad entrambi gli assi, con frontiere regolari a tratti e con parti interne a due a due disgiunte.*

La corona circolare $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ è un esempio di dominio decomponibile: una possibile ripartizione di C è data dai quattro settori contenuti nei quattro quadranti. La sua frontiera è data dall'unione delle due circonferenze $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$. In questo caso diremo che la frontiera di C è orientata positivamente se, percorrendo ciascuna delle circonferenze, C resta sempre a sinistra. Ciò significa che $x^2 + y^2 = 4$ è percorsa in senso antiorario e $x^2 + y^2 = 1$ in senso orario. Questa convenzione vale più in generale per un dominio decomponibile che presenta dei "buchi": la curva esterna è percorsa in senso antiorario, quelle interne in senso orario.

Si può dimostrare che **il Teorema di Green continua a valere in insiemi decomponibili**: basta scrivere la formula del teorema in ciascun sottoinsieme semplice e sommare tutte le formule così ottenute.

Corollario 1 *Sia D un insieme che soddisfa le ipotesi del Teorema di Green. Allora*

$$\text{area}(D) = \oint_{\partial D^+} (-y\,\hat{\imath}) \cdot \boldsymbol{\tau} = \oint_{\partial D^+} (x\,\hat{\jmath}) \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2}\oint_{\partial D^+} (-y\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath}) \cdot \boldsymbol{\tau}.$$

Veniamo ora al teorema della divergenza o di Gauss in $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2 (Teorema della divergenza in 2D) *Sia D un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ limitato e decomponibile secondo la Definizione 1; indichiamo con $\mathbf{n_e}$ il versore normale esterno a ∂D. Sia $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\hat{\imath} + F_2(x, y)\hat{\jmath}$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$, con A aperto contenente D. Allora vale la formula*

$$\iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dxdy = \oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_e}\, ds, \tag{4}$$

dove $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$ indica la **divergenza** *del campo $\mathbf{F}$.*

Nella formula (4) l'integrale al secondo membro è un integrale curvilineo di prima specie (per questo non conta il verso di percorrenza di ∂D) e rappresenta il **flusso di F uscente da** D.

Una possibile dimostrazione del Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$ si ottiene attraverso il Teorema di Green.
Dimostrazione. Supponiamo per semplicità che l'insieme D abbia per frontiera il sostegno di un solo arco regolare chiuso e semplice $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. Applicando il Teorema 1 al campo $\mathbf{F}^\perp = -F_2\hat{\imath} + F_1\hat{\jmath}$, ortogonale al campo $\mathbf{F}$ otteniamo

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\partial D^+} \mathbf{F}^\perp \cdot \boldsymbol{\tau}. \tag{5}$$

L'integrale curvilineo al secondo membro di (5) diventa

$$
\begin{aligned}
\oint_{\partial D^+} \mathbf{F}^{\perp} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \int_a^b \Big(-F_2\big(\gamma(t)\big)\hat{\imath} + F_1\big(\gamma(t)\big)\hat{\jmath}\Big) \cdot \big(x'(t)\hat{\imath} + y'(t)\hat{\jmath}\big) dt \\
&= \int_a^b \Big(F_1(\gamma(t))\hat{\imath} + F_2(\gamma(t))\hat{\jmath}\Big) \cdot \big(y'(t)\hat{\imath} - x'(t)\hat{\jmath}\big) dt \\
&= \int_a^b \Big(F_1(\gamma(t))\hat{\imath} + F_2(\gamma(t))\hat{\jmath}\Big) \cdot \underbrace{\frac{\big(y'(t)\hat{\imath} - x'(t)\hat{\jmath}\big)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}}_{\mathbf{n_e}} \underbrace{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt}_{=ds} \\
&= \oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_e}\, ds.
\end{aligned}
$$

La tesi risulta così provata. ■

2 In $\mathbb{R}^3$

Sia Σ una superficie (semplice) regolare di $\mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$\sigma(u,v) = x(u,v)\hat{\imath} + y(u,v)\hat{\jmath} + z(u,v)\hat{\mathrm{k}}, \qquad (u,v) \in D$$

con D regione limitata di $\mathbb{R}^2$. I versori $\mathbf{n} = \dfrac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}$ e $-\mathbf{n}$ sono entrambi normali alla superficie, diretti in verso opposto.

Definizione 2 *Diremo che Σ è* **orientabile** *se per ogni arco chiuso che giace su Σ e parametrizzato da $\gamma : [a,b] \to \Sigma$ risulta $\mathbf{n}(\gamma(a)) = \mathbf{n}(\gamma(b))$, ossia dopo un giro completo il versore normale risulta ancora puntato nello stesso verso. La scelta di $\mathbf{n}$ o $-\mathbf{n}$ su tutta la superficie determina l'orientazione di Σ, che si dice in tal caso superficie orientata.*

Su una superficie orientabile è possibile distinguere "due lati" e fissare un'orientazione significa fissare un *verso di attraversamento* della superficie.

Esempi di superfici orientabili sono le superfici cartesiane. Per una superficie cartesiana di equazione $z = f(x,y)$ il versore normale dato da

$$\mathbf{n} = \frac{(-\partial_x f, -\partial_y f, 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}$$

punta sempre verso l'alto. Per la sfera o per il toro i versori normali puntano verso l'interno o verso l'esterno.

Teorema 3 (Teorema della divergenza in 3D) *Sia V un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ limitato e semplice rispetto a tutti e tre gli assi cartesiani, la cui frontiera ∂V è costituita da superfici regolari e orientabili incollate lungo "spigoli"; indichiamo con $\mathbf{n_e}$ il versore normale esterno a ∂V. Sia $\mathbf{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\hat{\imath} + F_2(x,y,z)\hat{\jmath} + F_3(x,y,z)\hat{\mathrm{k}}$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$, con A aperto contenente V. Allora vale la formula*

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dxdydz = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_e}\, d\sigma. \tag{6}$$

L'espressione

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

si chiama **divergenza** del campo $\mathbf{F}$. L'integrale di superficie al secondo membro di (6) è il **flusso** del campo $\mathbf{F}$ uscente dalla frontiera ∂V. Se $\mathbf{F}$ rappresenta il campo di velocità di un fluido, il flusso rappresenta la *portata*, ossia la quantità di fluido che attraversa la superficie nell'unità di tempo.

La dimostrazione del Teorema 3 poggia sul seguente Lemma.

Lemma 1 *Sia* $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in D, g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y)\}$*, con* D *regione limitata di* $\mathbb{R}^2$ *e* $g_1, g_2 : D \to \mathbb{R}$ *funzioni di classe* C^1*. Se* $f : A \to \mathbb{R}$ *è una funzione di classe* C^1 *in* A *aperto contenente* V *allora*

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dxdydz = \iint_{\partial V} f\,\hat{\mathrm{k}} \cdot \mathbf{n_e}\, d\sigma. \tag{7}$$

Dimostrazione. L'obiettivo è trasformare i due membri dell'identità (7) nella stessa espressione. Cominciamo dal primo membro e applichiamo la formula di integrazione per fili e poi il teorema fondamentale del calcolo integrale rispetto alla variabile z

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dxdydz = \iint_D \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) dxdy = \iint_D \Big(f(x, y, g_2(x, y)) - f(x, y, g_1(x, y)) \Big) dxdy. \tag{8}$$

Analizziamo ora l'integrale al secondo membro di (7). La frontiera di V è costituita dalla superficie laterale Σ_l e dalle superfici cartesiane Σ_1 e Σ_2 di equazioni $z = g_1(x, y)$ e $z = g_2(x, y)$, rispettivamente. Su Σ_l il versore normale è diretto orizzontalmente per cui $\hat{\mathrm{k}} \cdot \mathbf{n_e} = 0$. Pertanto

$$\iint_{\partial V} f\,\hat{\mathrm{k}} \cdot \mathbf{n_e}\, d\sigma = \iint_{\Sigma_1} f\,\hat{\mathrm{k}} \cdot \mathbf{n_e}\, d\sigma + \iint_{\Sigma_2} f\,\hat{\mathrm{k}} \cdot \mathbf{n_e}\, d\sigma. \tag{9}$$

Su Σ_2 il versore normale esterno punta verso l'alto e dunque è dato da

$$\mathbf{n_e} = \frac{(-\partial_x g_2, -\partial_y g_2, 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla g_2\|^2}},$$

per cui

$$\hat{\mathrm{k}} \cdot \mathbf{n_e} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla g_2\|^2}}.$$

Tenendo conto della definizione di integrale di superficie abbiamo

$$\iint_{\Sigma_2} f\,\hat{\mathrm{k}} \cdot \mathbf{n_e}\, d\sigma = \iint_D f(x, y, g_2(x, y)) \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla g_2\|^2}} \sqrt{1 + \|\nabla g_2\|^2} dxdy = \iint_D f(x, y, g_2(x, y)) dxdy. \tag{10}$$

L'integrale di superficie su Σ_1 si esplicita allo stesso modo, tenendo solo conto nel fatto che ora la normale esterna punta verso il basso. Ciò comporta un segno $-$

$$\iint_{\Sigma_2} f\,\hat{\mathrm{k}} \cdot \mathbf{n_e}\, d\sigma = -\iint_D f(x, y, g_1(x, y)) dxdy. \tag{11}$$

Le formule (9), (10) e (11) implicano

$$\iint_{\partial V} f\,\hat{\mathrm{k}} \cdot \mathbf{n_e}\, d\sigma = \iint_D f(x, y, g_2(x, y)) dxdy - \iint_D f(x, y, g_1(x, y)) dxdy$$

che confrontata con (8) dimostra la tesi. ■

In modo del tutto simmetrico, se V è semplice rispetto all'asse y si può dimostrare

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial y} dxdydz = \iint_{\partial V} f\,\hat{\jmath} \cdot \mathbf{n_e}\, d\sigma. \tag{12}$$

Se è semplice rispetto all'asse x vale

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial x} dxdydz = \iint_{\partial V} f\,\hat{\imath} \cdot \mathbf{n_e}\, d\sigma. \tag{13}$$

Dimostrazione del Teorema 3: Applicando (13), (12), (7) alle funzioni componenti F_1, F_2 e F_3 rispettivamente e sommando le formule ottenute si ha (6). ■

Osservazione. Il Teorema della divergenza vale in insiemi V più generali. È possibile considerare insiemi che siano decomponibili nell'unione di un numero finito di sottoinsiemi a due a due disgiunti e semplici rispetto agli assi cartesiani, le cui frontiere siano superfici chiuse regolari a pezzi e orientabili.

Per enunciare il Teorema di Stokes, occorre parlare del *bordo* di una superficie. Lo faremo in una situazione semplificata. Sia Σ una superficie regolare, parametrizzata da $\sigma : \overline{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dove $D \subset \mathbb{R}^2$ è la parte di piano racchiusa da un arco regolare, semplice e chiuso. Supponiamo che σ sia biettiva in $\overline{D}$. Chiamiamo **bordo** di Σ e lo denotiamo con $\partial\Sigma$ l'immagine di ∂D mediante σ:

$$\partial\Sigma = \sigma(\partial D).$$

Se ∂D è orientato positivamente, allora diremo che anche il bordo di Σ è orientato positivamente:

$$\partial\Sigma^+ = \sigma(\partial D^+).$$

Teorema 4 (Teorema di Stokes o del rotore) *Sia* $\mathbf{F}$ *un campo vettoriale di* $\mathbb{R}^3$ *di classe* C^1 *in un aperto che contiene* Σ. *Allora*

$$\underbrace{\iint_\Sigma \nabla \wedge \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma}_{\textit{flusso del rotore di } F \textit{ attraverso } \Sigma} = \underbrace{\oint_{\partial\Sigma^+} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}}_{\textit{circuitazione del campo } F} \tag{14}$$

dove $\nabla \wedge \mathbf{F}$ *è il rotore di* $\mathbf{F}$ *e* $\mathbf{n} = \dfrac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}$.

Per stabilire l'orientazione corretta del bordo si può procedere equivalentemente in questo modo (che non necessita esplicitamente della parametrizzazione). Se si parte da una superficie Σ orientata con versore normale $\mathbf{n}$, allora l'orientazione della superficie induce un'orientazione, ossia un verso di percorrenza del bordo $\partial\Sigma$ secondo la seguente regola: un osservatore in piedi lungo $\mathbf{n}$ che si muove lungo $\partial\Sigma$ vede i punti della superficie a sinistra.

Esistono superfici senza bordo, come la sfera, il toro. Queste si dicono **chiuse**.

Il bordo di una superficie regolare a pezzi è costituito dall'unione degli spigoli che non appartengono a due facce adiacenti. Una scatola a forma di parallelepipedo è senza bordo.

Osservazione. Il Teorema di Stokes è la versione in $\mathbb{R}^3$ del Teorema di Green: Se la superficie Σ giace nel piano xy e il campo $\mathbf{F}$ è della forma $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\hat{\imath} + F_2(x, y)\hat{\jmath}$, allora (14) non è altro che (1).