ESERCIZIO 1

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n^2 x}}{3^{n^2} n^2}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{2^{n^2 x}}{3^{n^2} n^2}} = \left(\frac{2^{n^2 x}}{3^{n^2} n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{(2^{n^2 x})^{\frac{1}{n}}}{3^{n^2/n}\ n^{2/n}} = \frac{2^{nx}}{3^n\ n^{2/n}}$$

$$= \frac{(2^x)^n}{3^n\ n^{2/n}}$$

Ponendo $\boxed{y = 2^x}$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{3^n\ n^{2/n}}$ (*)

Applicando il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{3^n\ n^{2/n}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^{2/n^2}} = \frac{1}{3}\ \frac{1}{e^{\frac{2}{n^2}\log n}} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

Quindi (*) ha raggio di convergenza $R = 3$.

Studiando il comportamento agli estremi:

$y = 3$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}$ non converge in quanto $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$

e quindi non vale la cond. necessaria di convergenza

$y = -3$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n^2}}$ non converge in quanto

$$\nexists \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n^2}}$$

(la sottosuccessione dei termini con indici pari tende a 1
" " " " " " dispari " " -1

Pertanto

$$-3 < y < 3$$

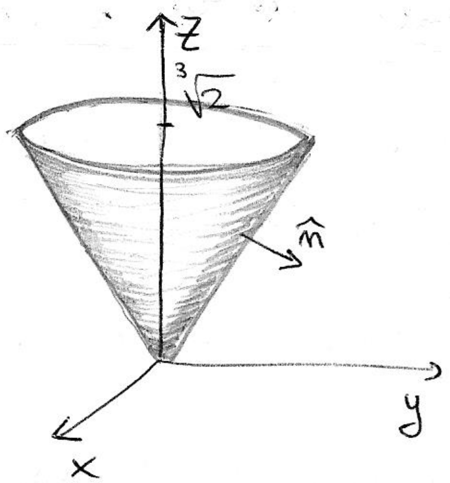
$$\underbrace{-3 < 2^x}_{\text{Sempre vera}} < 3$$

$$2^x < 3 \iff \boxed{x < \log_2 3}$$

ESERCIZIO 2

È opportuno applicare il teorema della divergenza, in quanto il calcolo diretto risulta più complesso.

Tuttavia la superficie Σ_1 non è chiusa:



Σ_1 è solo la superficie laterale del cono

Sia $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+4y^2} \leq z \leq \sqrt[3]{2}\}$

$\partial V = \Sigma_1 \cup B$ dove $B: z = \sqrt[3]{2}$

con $x^2 + 4y^2 \leq \sqrt[3]{4}$

B è il "disco" che chiude il cono sul piano $z = \sqrt[3]{2}$ (ellittico)

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial V} \vec{F}\cdot\hat{n}_e\,dS = \iint_{\Sigma_1} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS + \iint_B \vec{F}\cdot\hat{k}\,dS$$

Siccome $\nabla\cdot\vec{F} = 0$ si ottiene

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = -\iint_B \vec{F}\cdot\hat{k}\,dS$$

$$\iint_B \vec{F}\cdot\hat{k}\,dS = \iint_{\{x^2+4y^2\leq\sqrt[3]{4}\}} x^2y^2\,dx\,dy =$$

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{2}\,\rho\cos\theta \\ y = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\,\rho\sin\theta \end{cases}$$

$$dx\,dy = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta\,\sqrt[3]{4}\,\frac{\sqrt[3]{4}}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 2\theta}{4}\,d\theta = \frac{1}{48}\cdot\pi$$

In conclusione $\boxed{\iint_{\Sigma_1} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = -\frac{\pi}{48}}$

ESERCIZIO 3

Il vincolo G può essere scritto in forma parametrica ponendo:

$$G: \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{7}{2} \\ z = \frac{2t-5}{4} \end{cases}$$

Pertanto

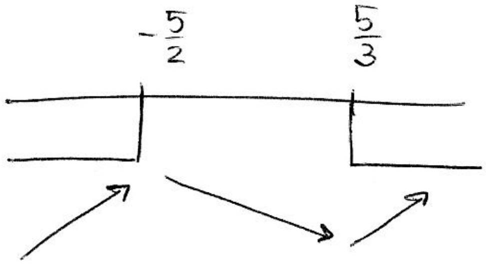
$$h(t) = f_{|G} = \frac{2t^2-5t}{4}\, e^{-\frac{2}{5}t - \frac{7}{4} + t - \frac{5}{2}} = \frac{2t^2-5t}{4} e^{\frac{3}{5}t - \frac{17}{4}}$$

$$h'(t) = e^{\frac{3}{5}t - \frac{17}{4}} \left\{ \frac{4t-5}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2t^2-5t}{4} \right\} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4t - 5 + \frac{3}{5}(2t^2 - 5t) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4t - 5 + \frac{6}{5}t^2 - 3t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6}{5}t^2 + t - 5 \geq 0$$

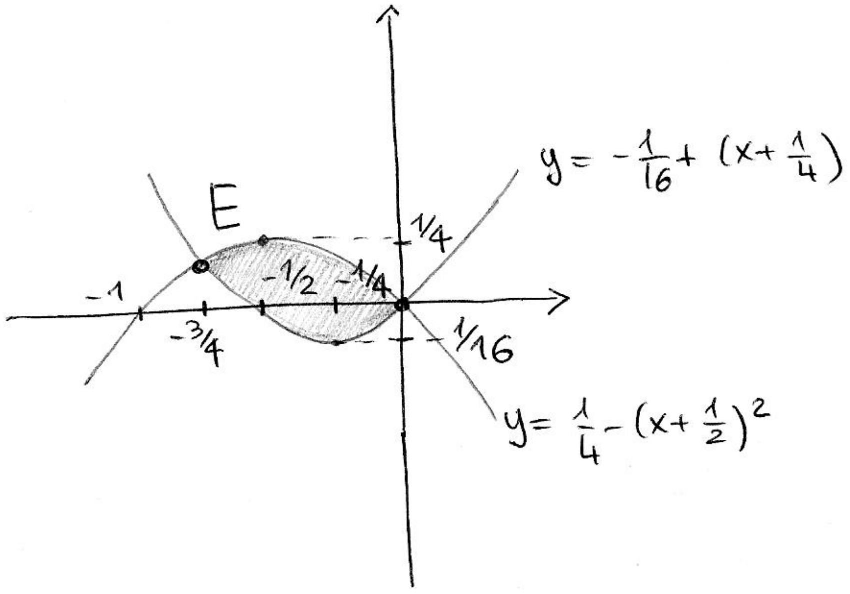
$$t_{1/2} = \frac{-1 \pm 5}{\frac{12}{5}} = \begin{cases} -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{3} \end{cases}$$



$t = -\frac{5}{2}$ pto di max
per h
$t = \frac{5}{3}$ pto di min

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} P_1\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right) \text{ pto di max} & \\ & \text{per } f \\ P_2\left(\frac{5}{3}, -\frac{7}{2}, -\frac{5}{12}\right) \text{ pto di min} & \end{array}}$$

ESERCIZIO 4



Le due parabole si intersecano in due punti di ascisse $-\frac{3}{4}$, 0. Pertanto

$$\iint_E e^x \, dx\, dy = \int_{-\frac{3}{4}}^{0} e^x \int_{x^2+\frac{x}{2}}^{-x^2-x} dy\, dx = -\int_{-\frac{3}{4}}^{0} e^x \left(2x^2 + \frac{3}{2}x\right) dx$$

$$= \boxed{-\frac{5}{2} + \frac{11}{2} e^{-\frac{3}{4}}}$$

integrando per parti 2 volte.

ESERCIZIO 5

$$\vec{r}(u,v) = (4u^2 - 3v^3, u, v) \qquad (u,v)\in D$$

$$P_0 = \vec{r}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{61}{64}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (1, -8u, 9v^2)$$

$$(\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \left(1, -4, \frac{9}{16}\right)$$

retta normale a Σ_1 in P_0 : $\begin{cases} x = \frac{61}{64} + t \\ y = \frac{1}{2} - 4t \\ z = \frac{1}{4} + \frac{9}{16}t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

$$dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\, du\, dv = \sqrt{1 + 64u^2 + 81v^4}\, du\, dv$$

$$\iint_{\Sigma_1} \frac{x+y+z}{\sqrt{1+64y^2+81z^4}}\, dS = \iint_D (4u^2 - 3v^3 + u + v)\, du\, dv$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2u} (4u^2 - 3v^3 + u + v)\, dv \right) du = \frac{14}{15}$$

Una rappresentazione parametrica di Σ_1 è

$$x = 4y^2 - 3z^3$$

con $(y,z)\in D$.

ESERCIZIO 6

Anzichè calcolare il lavoro con l'integrale di linea (che è piuttosto complicato!) è opportuno verificare se $\vec{F}$ è conservativo:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2 = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

sì! ($\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso)

Un potenziale è $U(x,y) = 2xy + \frac{e^{2x}}{2} - \cos y$

Pertanto $\mathcal{L} = U(D) - U(A) = \boxed{\frac{1}{2e^4} - \frac{3}{2} + \cos\sqrt{2}}$

(il cos è una funzione pari)