Esercizio 1

Applicando il T. di Stokes, il flusso richiesto è uguale a $\oint_{\partial\Sigma_1^+} \vec{F}\cdot d\vec{r}$. Il bordo di Σ_1 è parametrizzato da $\vec{r}(t) = (\sqrt{3}\cos t,\ 0,\ \sqrt{3}\sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$ (si ottiene dal sistema $\begin{cases} x^2+(y-1)^2+z^2=4 \\ y=0 \end{cases}$)

Pertanto:

$$\int_0^{2\pi} \left(3\sqrt{3}\cos^3 t + \sqrt{3}\sin t,\ 1,\ 3\sin t\cos t - 3\sqrt{3}\sin^3 t\right) \cdot (-\sqrt{3}\sin t,\ 0,\ \sqrt{3}\cos t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-9\cos^3 t\sin t - 3\sin^2 t + 3\sqrt{3}\sin t\cos^2 t - 9\sin^3 t\cos t\right) dt$$

$$= \left(\frac{9}{4}\cos^4 t - \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t - \frac{3\sqrt{3}}{3}\cos^3 t - \frac{9}{4}\sin^4 t\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= -3\pi$$

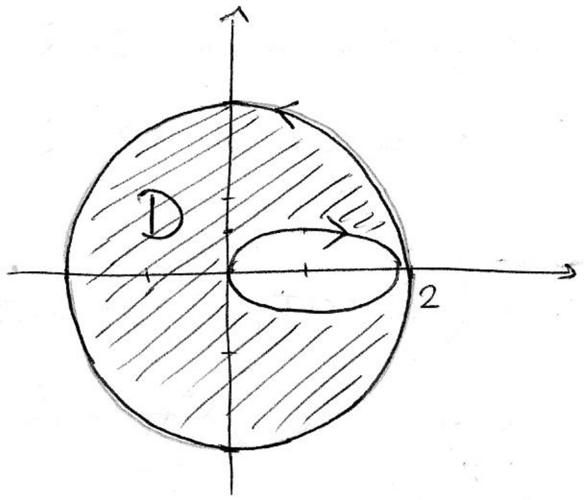
<u>oppure</u>: è possibile calcolare il flusso del rotore attraverso la superficie $\Sigma_1' : \begin{cases} x^2+z^2 \leq 3 \\ y=0 \end{cases}$

orientata con $-\hat{j}$.

Pertanto $\nabla\times\vec{F} = (1-z)\hat{j}$

$$\iint_{\Sigma_1'} \nabla\times\vec{F}\cdot\hat{n}\, dS = \iint_{\{x^2+z^2\leq 3\}} (z-1)\, dx\, dz = -3\pi$$

Esercizio 2



Applichiamo il T. di Green:

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D (2x-2y)\,dx\,dy \underset{\uparrow}{=} \iint_D 2x\,dx\,dy$$

simmetria
di D rispetto a $y=0$

$$= \underbrace{\iint_{\{x^2+y^2\le 4\}} 2x\,dx\,dy}_{=0 \text{ per simmetria}} - \iint_{\{(x-1)^2+4y^2\le 1\}} 2x \quad =$$

cambio di variabili:

$$\begin{cases} x = 1+\rho\cos\theta \\ y = \frac{1}{2}\rho\sin\theta \end{cases}$$

$$dx\,dy = \frac{1}{2}\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= -2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+\rho\cos\theta)\frac{1}{2}\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= -\pi$$

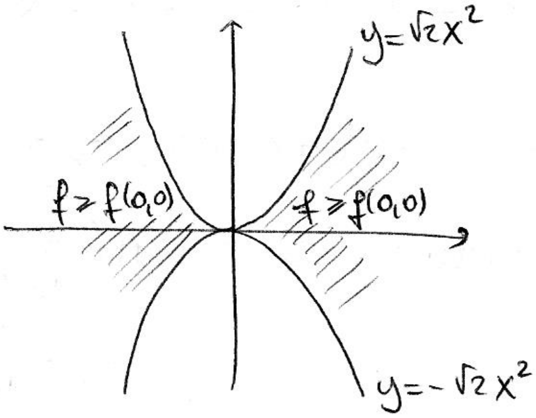
Esercizio 3

$f = 1 + 2x^4 - y^2$

unico pto critico $(0,0)$ in cui la matrice hessiana è semidefinita negativa. Valutiamo l'incremento di f in $(0,0)$:

$$f(x,y) - f(0,0) = 1 + 2x^4 - y^2 - 1 = 2x^4 - y^2 \geq 0 \iff$$

$$\iff y^2 \leq 2x^4 \iff |y| \leq \sqrt{2}x^2 \iff -\sqrt{2}x^2 \leq y \leq \sqrt{2}x^2$$

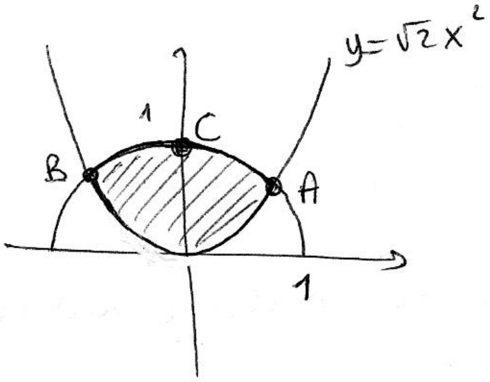


In ogni intorno di $(0,0)$ ci sono punti dove $f \geq f(0,0)$ e punti dove $f < f(0,0)$. Pertanto $(0,0)$ è pto di sella.

<u>Oppure</u>: $f(x,0) = 1 + 2x^4$ ha in $x=0$ un pto di min

$f(0,y) = 1 - y^2$ ha in $y=0$ un pto di max

$\Rightarrow (0,0)$ pto di sella.



Non esistono pti critici interni a k.

Sull' arco di parabola $y=\sqrt{2}x^2$ f è costante pari a 1.

Sull' arco di circonf. $y^2=1-x^2$ la restrizione di f

è $\quad h(x) = 1+2x^4-1+x^2 = 2x^4+x^2$

$$h'(x) = 8x^3+2x = 2x(4x^2+1) \geq 0 \iff x \geq 0$$

i punti da considerare sono $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$C(0,1)$

$f(A) = f(B) = 1$

$f(C) = 0$

Ne segue che $\min\limits_{k} f = 0 = f(C)$

$\max\limits_{k} f = 1 = f(P)$, $\forall P \in$ arco di parabola da A a B

Esercizio 4

Tramite il cambio di variabili $y = \frac{4}{x}$ la serie data si riconduce alla serie di potenze:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} y^k \qquad (*)$$

Siccome:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k-1} = \frac{k}{(k+1)(k-1)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

risulta $R = +\infty$, ossia la serie $(*)$ converge $\forall y \in \mathbb{R}$.

Ne segue che $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^k (k-1)}{k! x^k}$ converge $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ESERCIZIO 5

Applichiamo il T. della divergenza:

$$\nabla \cdot \vec{F} = 2x - \frac{3}{x^2+y^2}$$

$\iiint_V 2x = 0$ per simmetria

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dx dy dz = -3 \iiint_V \frac{1}{x^2+y^2} \, dx dy dz =$$

per strati

$$= -3 \int_2^5 \left(\iint_{2 \leq x^2+y^2 \leq z} \frac{1}{x^2+y^2} \, dx dy \right) dz =$$

$$= -3 \int_2^5 \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{z}} \frac{1}{\rho} \, d\rho \, d\theta \, dz = -15\pi \log\frac{5}{2} + 9\pi$$

oppure per fili:

$$\iint_{2 \leq x^2+y^2 \leq 5} \left(\int_{x^2+y^2}^{5} \frac{-3}{x^2+y^2} \, dz \right) dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(\int_{\rho^2}^{5} -\frac{3}{\rho} \, dz \right) d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(-\frac{15}{\rho} + 3\rho \right) d\rho \, d\theta =$$

$$= \cancel{2}\pi \, (-15) \frac{1}{\cancel{2}} \log \frac{5}{2} + \cancel{2}\pi \cdot \frac{3}{\cancel{2}} (5-2)$$

$$= -15\pi \log \frac{5}{2} + 9\pi$$

ESERCIZIO 6

Basta considerare le restrizioni di f agli assi cartesiani:

$$f(x,0) = \frac{x^4}{x^6} = \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$

$$f(0,y) = \frac{y^2}{|y|} = |y| \xrightarrow[y \to 0]{} 0$$

Avendo trovato 2 limiti diversi, il limite assegnato non esiste.