Soluzioni della prova scritta del 7 febbraio 2014

1. Calcolare $\int_\Sigma \sqrt{x^2+y^2}dA$, dove Σ è la superficie cartesiana $z = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$, $(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{1}{3} \le x^2+y^2 \le 1\}$, indicando i passaggi principali.
Soluzione. Poniamo $f(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$. Allora $dA = \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dxdy = \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$ e pertanto si ha
$$\int_\Sigma \sqrt{x^2+y^2}dA = \int_D \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \rho\sqrt{1+\rho^2}d\theta d\rho = 2\pi\frac{1}{3}(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1$$
$$= \frac{2}{3}\pi\left(2\sqrt{2} - \frac{8}{9}\sqrt{3}\right).$$

2. Determinare e classificare i punti critici della funzione $f(x,y,z) = x^4+x^2(z^2-2z-1)+y^2+(z-1)^2$.
Soluzione. Risolviamo il sistema
$$\begin{cases} 4x^3+2x(z^2-2z-1)=0 \\ 2y=0 \\ (2x^2+2)(z-1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^3+2x(z^2-2z-1)=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x(x^2-1)=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$
Quindi i punti critici sono $(0,0,1), (1,0,1), (-1,0,1)$. Valutando la matrice hessiana in ciascun punto critico si vede che $(0,0,1)$ è un punto sella e gli altri due sono punti di minimo relativo.

3. Siano $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definite rispettivamente da $G(u,v,w,t) = e^{u+v}\cos(u^3+v^2+t)$, $F(x,y,z) = (x+y, y-z, x+y^2+z^2, xyz)$. Sia $H = G \circ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Calcolare $\nabla H(1,0,1)$, indicando la formula usata.

Soluzione. Il teorema di derivazione della funzione composta implica che
$$\nabla H(x,y,z) = \nabla G(F(x,y,z))(\mathrm{Jac}F)(x,y,z).$$
Siccome
$$\nabla G = \begin{pmatrix} e^{u+v}\cos(u^3+v^2+t) - 3u^2e^{u+v}\sin(u^3+v^2+t) \\ e^{u+v}\cos(u^3+v^2+t) - 2ve^{u+v}\sin(u^3+v^2+t) \\ 0 \\ -e^{u+v}\sin(u^3+v^2+t) \end{pmatrix}$$
e
$$\mathrm{Jac}F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$
A questo punto $F(1,0,1) = (1,-1,2,0)$,
$$\nabla G(1,-1,2,0) = \begin{pmatrix} \cos 2 - 3\sin 2 \\ \cos 2 + 2\sin 2 \\ 0 \\ -\sin 2 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathrm{Jac}F(1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \nabla H(1,0,1) &= (\cos 2 - 3\sin 2, \cos 2 + 2\sin 2, 0, -\sin 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (\cos 2 - 3\sin 2, 2\cos 2 - 2\sin 2, -\cos 2 - 2\sin 2) \end{aligned}$$

4. Determinare l'insieme di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2+1}$. Stabilire se la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^k}{k^2+1}$ è convergente o divergente, motivando la risposta.
Soluzione. Con il criterio del rapporto si trova facilmente che il raggio di convergenza è 1. Per lo studio agli estremi osserviamo che

$$x = 1 \ : \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1} \quad \text{converge}$$

in quanto $\frac{1}{k^2+1}$ è asintotico a $\frac{1}{k^2}$ che è il termine generale della serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ che converge.

$$x = -1 \ : \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1} \quad \text{converge}$$

per il criterio di Leibniz. Pertanto l'insieme di convergenza della serie di potenze è $[-1,1]$. Infine, la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^k}{k^2+1}$ diverge perché e non appartiene all'intervallo di convergenza $[-1,1]$.

5. Calcolare $\displaystyle\iiint_E \frac{z\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq \pi^2, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{3x^2+3y^2}, x \geq 0\}$.
Soluzione. In coordinate sferiche l'insieme E è descritto dalle seguenti disuguaglianze

$$0 \leq \rho \leq \pi$$
$$\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$
$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Pertanto

$$\iiint_E \frac{z\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi} \frac{\rho\cos\varphi\cos\rho}{\rho^2}\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \pi\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\rho\sin\rho+\cos\rho)\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{4}$$

6. Sia $\gamma(t) = (2\cos t, \sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\sin t)$, $t \in [0,\pi]$. Determinare la lunghezza di γ e le coordinate del baricentro (assumendo distribuzione di massa uniforme). Scrivere le formule usate.

   Soluzione. Si ha $\gamma'(t) = (-2\sin t, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\cos t)$, da cui $\|\gamma'(t)\| = 2$. Pertanto

$$\ell(\gamma) = \int_0^{\pi} \|\gamma'(t)\|dt = 2\pi$$

e

$$x_G = \frac{1}{\ell(\gamma)}\int_\gamma x\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(2\cos t)\,2dt = 0$$

$$y_G = \frac{1}{\ell(\gamma)}\int_\gamma y\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\sqrt{2}\sin t)\,2dt = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

$$z_G = \frac{1}{\ell(\gamma)}\int_\gamma z\,ds = y_G = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

sono le coordinate del baricentro.