Soluzioni della prova di esame di Analisi Matematica 2 del 21 giugno 2013

1. Calcolare

$$\iint_D \frac{\sqrt{x+2y+2}}{1+(2x+y)^2}\,dxdy, \qquad D=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x+2y+2<2,\ 1<2x+y<\sqrt{3}\Big\}$$

Soluzione: Con il cambio di variabili

$$\begin{cases} u = x+2y \\ v = 2x+y \end{cases}$$

che fornisce

$$\begin{cases} x = (-3)^{-1}(u-2v) \\ y = (-3)^{-1}(-2u+v) \end{cases}$$

l'integrale diventa

$$\frac{1}{3}\int_{-2}^{0}\sqrt{u+2}\,du\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+v^2}\,dv = \frac{1}{3}\frac{2}{3}\Big[(u+2)^{\frac{3}{2}}\Big]_{-2}^{0}\Big[\arctan v\Big]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{27}\pi.$$

2. Per quali $x\in\mathbb{R}$ converge la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}(x-x_0)^{2n}$? Determinare la somma $f(x)$ e $f^{(2k)}(x_0)$.

Soluzione: È una serie di tipo geometrico di ragione $(x-x_0)^2/e$, pertanto converge se e solo se $x\in(x_0-\sqrt{e},x_0+\sqrt{e})$. La somma è $f(x)=\dfrac{e}{e-(x-x_0)^2}$ e $f^{(2k)}(x_0)=(2k)!\,a_{2k}=(2k)!e^{-k}$.

3. Calcolare

$$\iiint_V z\,dxdydz,\ V=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y,z>0, 2-3\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2-2\sqrt{x^2+y^2}\Big\}$$

Soluzione: Integrando per strati paralleli al piano xy si ha

$$\iiint_V z\,dxdydz = \int_0^2 z\iint_{A_z} dxdy\,dz$$

dove $A_z=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y>0,\ \dfrac{2-z}{3}\le\sqrt{x^2+y^2}\le\dfrac{2-z}{2}\Big\}$. Introducendo le coordinate polari nell'integrale doppio si ha

$$\int_0^2 z\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{2-z}{3}}^{\frac{2-z}{2}}\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)\int_0^2 z(2-z)^2\,dz = \frac{5}{108}\pi.$$

4. Dati il campo $F=(-y+z,x+y,2z+1)$ e la superficie Σ di equazione cartesiana $z=3-2x^2-\frac{1}{3}y^2$, $z\ge 0$ determinare

- il rotore di F;
- il versore normale $\hat{n}$ a Σ diretto verso l'alto;
- il flusso del rotore di F attraverso Σ orientata con $\hat{n}$.

Soluzione: Risulta

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y+z & x+y & 2z+1 \end{pmatrix} = \hat{\jmath} + 2\hat{k}.$$

Siccome Σ è una superficie cartesiana si ha

$$\hat{n} = \frac{(4x, \frac{2}{3}y, 1)}{\sqrt{1 + 16x^2 + \frac{4}{9}y^2}}$$

Calcolando il flusso direttamente risulta

$$\operatorname{rot} F \cdot \hat{n} = \frac{\frac{2}{3}y + 2}{\sqrt{1 + 16x^2 + \frac{4}{9}y^2}}$$

e quindi, se $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2x^2 + \frac{1}{3}y^2 \leq 3\}$, il flusso è

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot \hat{n} \, dA = \iint_E \frac{\frac{2}{3}y + 2}{\sqrt{1 + 16x^2 + \frac{4}{9}y^2}} \sqrt{1 + 16x^2 + \frac{4}{9}y^2} \, dxdy = \iint_E 2 \, dxdy = 2\text{area}(E) = 3\sqrt{6}\pi.$$

In alternativa, si può applicare il Teorema di Stokes e il flusso è dato dalla circuitazione di F lungo la curva nel piano xy di equazione cartesiana $2x^2 + \frac{1}{3}y^2 = 3$ (ellisse) orientata in verso antiorario. Parametrizzando tale curva con $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cos\theta, 3\sin\theta, 0\right)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ si trova

$$\int_0^{2\pi} \left(-3\sin\theta, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cos\theta + 3\sin\theta, 1\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sin\theta, 3\cos\theta, 0\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 9\sin\theta\cos\theta\right) d\theta = 3\sqrt{6}\pi.$$

5. Determinare il massimo e il minimo di $f(x, y, z) = x + y + z$ su $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1, x = y\}$ e i punti ove questi vengono raggiunti.

   Soluzione: I punti critici della Lagrangiana $\mathcal{L} = x + y + z - \lambda(2x^2 + 3y^2 + z^2 - 1) - \mu(x - y)$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 1 - 4\lambda x - \mu = 0 \\ 1 - 6\lambda y + \mu = 0 \\ 1 - 2\lambda z = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1 \\ x = y \end{cases}$$

   Risolvendolo (per $\lambda = 0$ è impossibile)

$$\begin{cases} \mu = 1 - 4\lambda x \\ 1 - 6\lambda x + 1 - 4\lambda x = 0 \\ z = \frac{1}{2\lambda} \\ 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1 \\ x = y \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \mu = 1 - 4\lambda x \\ x = \frac{1}{5\lambda} \\ z = \frac{1}{2\lambda} \\ \dfrac{2}{25\lambda^2} + \dfrac{3}{25\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} = 1 \to \lambda = \pm\sqrt{\dfrac{9}{20}} \\ x = y \end{cases}$$

e quindi si trovano i punti

$$P_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, 1\right), \quad P_2 = -P_1,$$

Si vede che P_1 è punto di massimo (assoluto) e P_2 punto di minimo (assoluto). Il massimo di f è $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ e il minimo $-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

6. Sia $f(x, y, z) = \dfrac{xy}{\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}y^2 + z^2}$. Determinare il dominio di f, $\nabla f(x, y, z)$. Studiare il $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z)$ motivando la risposta.

   Soluzione: Il dominio di f è $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Il gradiente è

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{1}{(\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}y^2 + z^2)^2}\left(-\sqrt{2}x^2y + \sqrt{3}y^3 + yz^2, \sqrt{2}x^3 - \sqrt{3}xy^2 + xz^2, -2xyz\right).$$

   Infine il limite non esiste, in quanto restringendo ad esempio la funzione alle rette del piano xy passanti per l'origine

$$f(x, mx, 0) = \frac{m}{\sqrt{2} + \sqrt{3}m^2}$$

   il limite dipende da m.