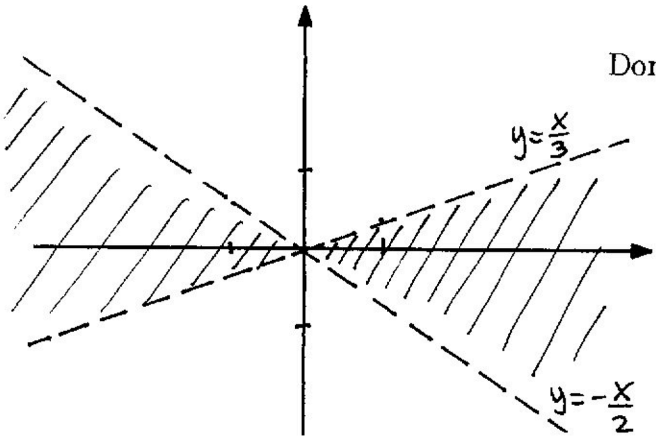
Orale: ☐ (19 − 20) ☐ (26 − 27 − 28)

ANALISI MATEMATICA 2 VERSIONE A 12/09/2011	COGNOME e Nome	firma

1. [4 pt] • Determinare e disegnare il dominio di $f(x,y) = \log\left(\dfrac{x+2y}{x-3y}\right)$.



Dom$f$ = $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{x+2y}{x-3y} > 0\right\}$

• Studiare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, motivando la risposta.

$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0 \neq \lim_{x\to 0} f\left(x, \frac{x}{4}\right) = \log 6$

Il limite richiesto non esiste

• Calcolare ∇f nel dominio di f; $\nabla f = \dfrac{5}{(x+2y)(x-3y)}\left(-y,\ x\right)$

2. [4 pt] Determinare i punti critici di $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2x-6yz+xz^2$ in $\mathbb{R}^3$ e classificarli.

$P_0\,(-1,0,0)$ punto sella

3. [4 pt] Calcolare $\iint_E (y-1)x^2\,dx\,dy$, $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2-2y \le 0, y \ge x, x \ge \frac{1}{2}\}$, indicando i passaggi salienti.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \int_{x}^{1+\sqrt{1-x^2}} (y-1)\,dy\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \left.\frac{(y-1)^2}{2}\right]_{y=x}^{y=1+\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{13}{320}$$

4. **[5 pt]** • Stabilire per quale valore del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ la curva di $\mathbb{R}^3$ di equazione

$$\gamma(t) = \begin{cases} t^2\,\hat{\imath} + at\,\hat{\jmath} & t \le 0 \\ t\,\hat{\jmath} + t^2\,\hat{k} & t > 0 \end{cases}$$

è regolare in $\mathbb{R}$. $\boxed{a = 1}$

• Determinare la retta tangente in $B = \gamma(1)$.

$B = (0, 1, 1)$ $\quad \gamma'(1) = (0, 1, 2)$ $\quad r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

• Calcolare il lavoro di $\mathbf{F} = (2x, 3y, z)$ lungo γ da $A = \gamma(-1)$ a $B = \gamma(1)$ con la scelta di a determinata al primo punto, indicando i passaggi salienti.

$\vec{F} = \nabla U$, $\quad U = x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{z^2}{2}$; $\quad \mathcal{L} = U(B) - U(A) = -\frac{1}{2}$

oppure

$$\int_{-1}^{0} (2t^2, 3t, 0) \cdot (2t, 1, 0)\,dt + \int_0^1 (0, 3t, t^2) \cdot (0, 1, 2t)\,dt = -\frac{1}{2}$$

5. **[5 pt]** Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{n + n^3} (x^2 - 1)^n$ è convergente, motivando la risposta.

$y = x^2 - 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{n + n^3} y^n$ serie di potenze converge se e solo se $|y| \le \frac{1}{3}$ ossia $\sqrt{\frac{2}{3}} \le |x| \le \sqrt{\frac{4}{3}}$.

6. **[5 pt]** Calcolare il volume della regione di $\mathbb{R}^3$ interna al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, compresa tra il paraboloide $z = x^2 + y^2 - 2$ e il piano $x + y + z = 3$, indicando i passaggi salienti.

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1\,dx\,dy\,dz = \iint_{\{x^2+y^2 \le 1\}} \left(\int_{x^2+y^2-2}^{3-x-y} dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{\{x^2+y^2 \le 1\}} (5 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \frac{9}{2}\pi$$

Domanda di teoria **[3 pt]** Enunciare il Teorema di Weierstrass

Siano $f: K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, K compatto.
Allora f ammette min e max assoluti.