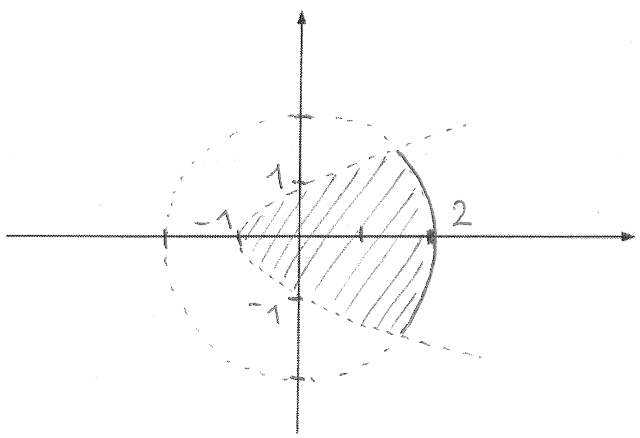
ORALE: ☐ 14–15–16 SETTEMBRE (I appello) ☐ 21–24–27 SETTEMBRE (II appello)

ANALISI MATEMATICA 2 Prova scritta, VERSIONE A 10/09/2010	COGNOME e Nome	firma

1. Si consideri la funzione $f(x,y) = \log(x - y^2 + 1)\sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Determinare il dominio di f

dom$f$ = $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 ; x > y^2 - 1\}$ e disegnarlo:



L'insieme dom$f$ è aperto? NO chiuso? NO limitato? SI

2. Si considerino le funzioni $\mathbf{g}(x,y) = (x^2 + y^3, xy^2 + x^3)$ e $f(u,v) = \sin^2 u + 1 - e^v$. Calcolare

$\nabla(f \circ \mathbf{g})(1,-1)$ $= \nabla f(g(1,-1))\, Jac\, g(1,-1) = (-4e^2, 2e^2)$

3. Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{2^{kx^2}}$ è convergente? $\frac{e^x}{2^{x^2}} < 1 \iff x < 0 \vee x > \frac{1}{\log 2}$ (SERIE GEOMETRICA)

Scrivere la somma della serie (per gli x per cui essa converge) $f(x)$= $\frac{2^{x^2}}{2^{x^2} - e^x}$

4. Si consideri la funzione $f(x,y,z) = 3x^2 - 10xy^2 + y^2 + z^2$. Determinare i punti stazionari di f in $\mathbb{R}^3$

$(0,0,0)$; $\left(\frac{1}{10}, \frac{\sqrt{6}}{10}, 0\right)$; $\left(\frac{1}{10}, -\frac{\sqrt{6}}{10}, 0\right)$

e classificarli:

$(0,0,0)$ punto di min ; $\left(\frac{1}{10}, \pm\frac{\sqrt{6}}{10}, 0\right)$ punti sella

5. Calcolare $\iiint_\Omega \log(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1, x^2+y^2 \le z^2, z \ge 0\}$, indicando i passaggi salienti[1].

In coordinate sferiche:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \log(\rho^2)\,\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = 2\pi\left[-\cos\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{2\int_0^1 \rho^2\log\rho\, d\rho}_{\text{per parti}} =$$

$$= -\frac{4}{9}\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

6. Calcolare il flusso del rotore del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\hat{\imath} - x\,\hat{\jmath} + (x^2+y^2)\,\hat{\mathrm{k}}$ attraverso la porzione di paraboloide $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | z = 4 - x^2 - 4y^2, z \ge 0\}$, orientata con versore normale che punta verso l'alto, indicando i passaggi salienti.

Applico il Teorema di Stokes:

$$\int_C \vec{F}\cdot\vec{\tau} =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t, -2\cos t, 4\cos^2 t + \sin^2 t)\cdot(-2\sin t, \cos t, 0) =$$

$$= -4\pi$$

C = ellisse di eq. $4 - x^2 - 4y^2 = 0$ nel piano $z=0$ parametrizzata con $\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \\ z(t) = 0 \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$

7. Scrivere una parametrizzazione semplice e regolare a tratti della frontiera dell'insieme $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \le 1, y \ge \sqrt{3}x, x \ge 0\}$

$\gamma_1(t) = t\,\hat{\imath} + \sqrt{3}t\,\hat{\jmath}$, $t\in[0,\frac{1}{2}]$; $\gamma_2(t) = \cos(t + \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2})\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}(t + \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2})\,\hat{\jmath}$, $t\in[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}]$

$\gamma_3(t) = 0\,\hat{\imath} + (-t + \frac{\pi}{6} + \frac{3}{2})\,\hat{\jmath}$, $t\in[\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}]$

Calcolare l'integrale curvilineo di $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ lungo ∂E (parametrizzata come sopra) indicando i passaggi salienti.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{3}\cancel{t}}{\cancel{2}\cancel{t}}\cancel{2}\,dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t\cdot dt + \int_0^1 \frac{\cancel{t}}{\cancel{t}}\,dt = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{3}+3}{2}$$

8. Dire se la superficie parametrica $\sigma(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ è regolare, giustificando la risposta.

$\vec{\sigma}_u = (\cos v, \operatorname{sen} v, 0)$; $\vec{\sigma}_v = (-u\operatorname{sen} v, u\cos v, 1)$; $\vec{\sigma}_u \wedge \vec{\sigma}_v = \operatorname{sen} v\,\hat{\imath} - \cos v\,\hat{\jmath} + u\hat{k}$

Siccome $\|\vec{\sigma}_u \wedge \vec{\sigma}_v\|^2 = 1 + u^2 \ne 0$, la superficie è regolare

Scrivere l'equazione del piano tangente in $(1,0,0)$

$(1,0,0) = \vec{\sigma}(1,0)$; $-y + z = 0$ eq. piano tangente

[1] per **passaggi salienti** si intendono quelli in cui si usano definizioni/teoremi/formule di riduzione/cambiamenti di variabili