ANALISI MATEMATICA 2 Prova scritta, VERSIONE A 05/07/2010	COGNOME e Nome	firma

1. Si consideri la funzione $f(x,y) = (2x - x^2)(y - y^2)$.

6 – Determinare i punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2$ e classificarli.

$(0,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(2,1)$ punti sella
$(1, \frac{1}{2})$ punto di max relativo

– Determinare il massimo e il minimo assoluti di f in $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$

$\min_E f = -2$; $\max_E f = 16$

e i punti di massimo e di minimo assoluti di f in E

$(1,-1)$; $(-2, \frac{1}{2})$ pti di min ass. ; $(-2,-1)$ pto di max ass.

2. Si considerino le funzioni $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}, 2xyz, xy^2 + z^2\right)$ e $\mathbf{g}(u,v,w) = \left(\log(1 + u^2v^2), w\right)$. Determinare la

2 matrice Jacobiana della funzione composta $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{F}$ nel punto $(1,1,1)$.

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{8}{5} & \frac{8}{5} \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_\Omega x\, dxdydz$, dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq$

4 $\frac{3}{2}(2 - \sqrt{x^2+y^2})\}$, indicando i passaggi salienti[1].

$$\iint_D \left(\int_0^{3/2(2-\sqrt{x^2+y^2})} x \, dz \right) dx\,dy = \iint_D x \cdot \frac{3}{2}\left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \frac{3}{2} \rho^2 \cos\theta (2-\rho)\, d\rho\, d\theta$$

$D = \{x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

$$= 2$$

4. Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = x^2\,\hat{\imath} + xy\,\hat{\jmath}$ lungo la frontiera dell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2+y^2 \leq$

4 $16, (x-1)^2 + y^2 \geq 4\}$ orientata positivamente, indicando i passaggi salienti.

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_{-4}^{-1} \int_0^{\sqrt{16-x^2}} y\, dy\, dx + \int_{-1}^{3} \int_{\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\sqrt{16-x^2}} y\, dy\, dx + \int_3^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} y\, dy\, dx$$

22

$$= \frac{27}{2} + 22 + \frac{11}{6} = \frac{112}{3}$$

[1] per **passaggi salienti** si intendono quelli in cui si usano definizioni/teoremi/formule di riduzione/cambiamenti di variabili

5. Si consideri la serie di potenze $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k\log(k^2)}(x-1)^k$. Determinare

3

– il raggio di convergenza $\boxed{1}$ e l'insieme di convergenza $\boxed{[0,2[}$

6. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = x(y^2+z^2)\,\hat{\imath} + 3y\,\hat{\jmath} + xz^2\,\hat{\mathrm{k}}$ uscente dalla superficie *laterale* del cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 4, y^2+z^2 \le 4\}$, indicando i passaggi salienti.

4

$$\Omega = \{x=4,\ y^2+z^2\le 4\};\quad \iiint_C \operatorname{div}\vec F - \iint_\Omega \vec F\cdot\hat n_e = \int_0^4 \iint_{\{y^2+z^2\le 4\}} (y^2+z^2)\,dydz\,dx \,+$$

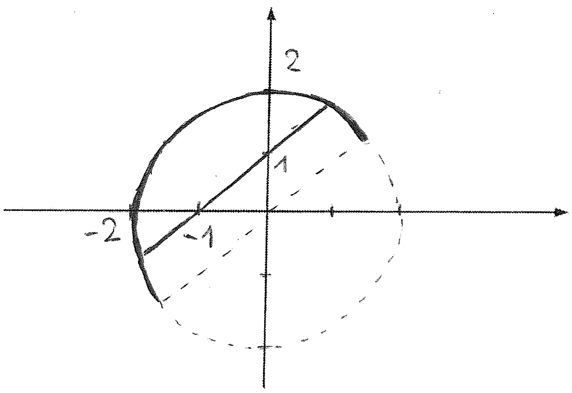
$$+\, 3\,\mathrm{Vol}(C) - \iint_{\{y^2+z^2\le 4\}} 4(y^2+z^2)\,dydz = 3\,\mathrm{Vol}(C) = 48\pi$$

7. Si consideri la funzione $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}\log(y-x)$. Determinare

3

– il dominio di f $\boxed{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 4,\ y>x\}}$

– l'insieme di livello 0 di f, $I_0 = \boxed{\{(x,y)\mid x^2+y^2=4,\ y>x\} \cup \{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4,\ y=x+1\}}$ e disegnarlo:



Calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ $\boxed{\frac{-x\log(y-x)}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{x-y}}$ specificandone il dominio:

$\boxed{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4,\ y>x\}}$

8. Si consideri la superficie cartesiana Σ data da $z = y^2 - x^2$ ristretta a $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \ge 1, 4x^2+y^2 \le 4\}$.

4

Calcolare l'integrale di superficie $\iint_\Sigma \sqrt{\frac{x^2+z}{1+4(x^2+y^2)}}\,d\sigma$, indicando i passaggi salienti.

$$\iint_R \frac{\sqrt{y^2}}{\cancel{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}}\cancel{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\,dxdy = 2\int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-4x^2}} y\,dy\,dx = 4$$