Orale: ☐ 18 GIUGNO (urgenti) ☐ GIUGNO (21 – 25) ☐ LUGLIO (8 – 16)

ANALISI MATEMATICA 2 Prova scritta, VERSIONE A 16/06/2010	COGNOME e Nome	firma

1. Si consideri la funzione $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - y$.

– Determinare i punti stazionari di f e classificarli

$\left(0, \frac{1}{2}\right)$ punto di min relativo

– Determinare il massimo e il minimo assoluti di f in $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$

$\min f = -\frac{1}{4}$; $\max f = 12$

e i punti di massimo e di minimo assoluti di f in E

$\left(0, \frac{1}{2}\right)$ punto di min ; $(0, -3)$ punto di max

2. Si consideri il campo $\mathbf{F}_\alpha = \left(2x\sin y + \frac{\alpha}{2}xy^2\right)\hat{\imath} + \left(x^2\cos y + \frac{1}{2}x^2 y\right)\hat{\jmath}$. Determinare

– il valore $\alpha_o \in \mathbb{R}$ per cui il campo è conservativo

$\alpha_o = 1$

– un potenziale di $\mathbf{F}_{\alpha_o}$

$x^2 \sin y + \frac{1}{4}x^2 y^2$

– il lavoro di $\mathbf{F}_{\alpha_o}$ lungo $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

0 ; il campo è conservativo e il cammino è chiuso

3. Si consideri la serie di potenze $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k + e^k}{k^3 + 1}(x-1)^k$. Determinare

– il raggio di convergenza $1/e$ e l'insieme di convergenza $\left[1 - \frac{1}{e}, 1 + \frac{1}{e}\right]$

– $f'''(1)$, dove $f(x)$ denota la somma della serie

$\frac{3}{14}(3 + e^3)$

4. Si consideri la curva $\gamma(t) = (4\cos t, 4\sin t, t)$, $t \in [0, \pi]$.

– Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto $P(0, 4, \frac{\pi}{2})$

$x = -4t$, $y = 4$, $z = \frac{\pi}{2} + t$

– calcolare l'integrale curvilineo di $f(x,y,z) = x^2 + yz$ lungo γ indicando i passaggi salienti[1].

$$\int_0^{\pi} \left(16\cos^2 t + 4t\,\text{sen}\,t\right)\sqrt{17}\,dt = 12\sqrt{17}\,\pi$$

✓

[1]per **passaggi salienti** si intendono quelli in cui si usano definizioni/teoremi/formule di riduzione/cambiamenti di variabili

5. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_\Omega y^2 z \, dxdydz$, dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2 \le 3, 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\}$, indicando i passaggi salienti.

$$\iint_D \left(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} y^2 z \, dz \right) dx\,dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{3}} (\rho^5 \operatorname{sen}^2\theta) \, d\rho\, d\theta = \frac{13}{6}\pi$$

$D = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 3\}$

6. Si considerino il campo $\mathbf{F} = 3xy\,\hat{\imath} + (z\sin x - y^2)\,\hat{\jmath} + (z-8)\,\hat{k}$ e l'insieme $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \ge 0, x^2+y^2+z^2 \le 9\}$. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ uscente dalla superficie ∂V, indicando i passaggi salienti.

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_V (y+1)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{3} (\rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta + 18\pi = \frac{153}{4}\pi$$

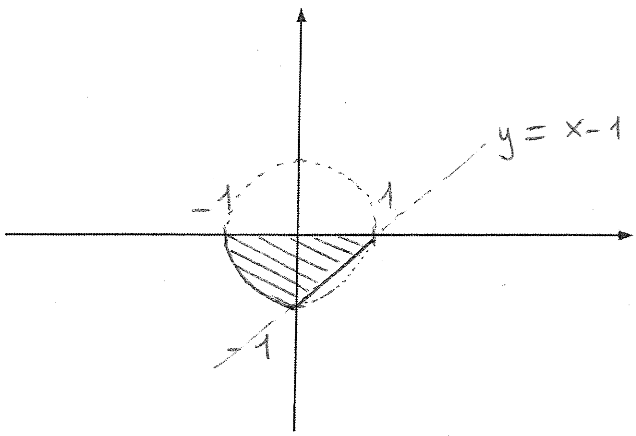
7. Si consideri la funzione $f(x,y) = \log(x^2) - \frac{x^2}{2} + y - \log(y)$. Determinare

– il dominio di f: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y > 0\}$

– $\nabla f(x,y)$: $\left(\frac{2}{x} - x, 1 - \frac{1}{y}\right)$

– la direzione di massimo incremento di f nel punto $(1,1)$: $(1, 0)$

8. Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1, y \le 0, y \ge x-1\}$. Disegnare E



– Calcolare $\iint_E x^2 y \, dxdy$, indicando i passaggi salienti.

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^1 \rho^4 \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \, d\rho\, d\theta + \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{0} x^2 y \, dy \right) dx = -\frac{1}{12}$$