Integrali doppi

Calcolare i seguenti integrali.

1. $\displaystyle\iint_\Omega \frac{y}{1+xy}dxdy, \qquad \Omega = [0,1]\times[0,1]$ $\qquad [2\log 2 - 1]$

2. $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x}{x^2+y^2}dxdy, \qquad \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 1\le x\le 2, \frac{x^2}{2}\le y\le x^2\}$
$[2\arctan 2 + \arctan(1/2) - 3/2\log 5 + 7/2\log 2 - 3\pi/4]$

3. $\displaystyle\iint_\Omega \frac{1}{(x+y)^2}dxdy, \qquad \Omega = [3,4]\times[1,3]$ $\qquad [\log(\frac{15}{14})]$

4. $\displaystyle\iint_\Omega 6e^{-2x-3y}dxdy, \qquad \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 1\le x\le 2, 2\le y\le 3\}$ $\qquad [\frac{(e^2-1)(e^3-1)}{e^{13}}]$

5. $\displaystyle\iint_\Omega e^{y^2}dxdy, \qquad \Omega =$ triangolo di vertici $(0,0),(0,1),(2,1)$ $\qquad [e-1]$

6. $\displaystyle\iint_\Omega \frac{y}{(1+x)(1+y^2)}dxdy,$ $\Omega =$ parte di piano delimitata da $x=y^2, y=1, x=0$ $\qquad [\frac{\log^2 2}{4}]$

7. $\displaystyle\iint_\Omega x^3y^2dxdy, \qquad \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2\le 4, x^2+(y-1)^2\ge 1\}$ $\qquad [0]$

8. $\displaystyle\iint_\Omega xydxdy, \qquad \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | (x-1)^2+y^2\le 4, x\ge 1, y\le 0\}$ $\qquad [-\frac{14}{3}]$

9. $\displaystyle\iint_\Omega \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy, \qquad \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2\le 4\}$ $\qquad [\pi\log 5]$

10. $\displaystyle\iint_\Omega \frac{\sin(y^2)}{y}dxdy, \qquad \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0\le x\le y^2, 0\le y\le\sqrt{\pi}\}$ $\qquad [1]$

11. $\displaystyle\iint_\Omega \frac{xy^2}{x^2+y^2}dxdy, \qquad \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 1\le x^2+y^2\le 4, y\ge x\}$ $\qquad [-\frac{7\sqrt{2}}{18}]$

12. $\displaystyle\iint_\Omega x^2y^2dxdy, \qquad \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | |x|+|y|\le 1\}$ $\qquad [\frac{1}{45}]$

13. $\displaystyle\iint_\Omega (x^2y+y^2)dxdy, \qquad \Omega =$ parte di piano delimitata da $y=2x, x=1, y=0$ $\qquad [16/15]$

14. $\displaystyle\iint_\Omega (xy+y)dxdy, \qquad \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2\le 1, y\ge 1/2\}$ $\qquad [\sqrt{3}/4]$

15. $\displaystyle\iint_\Omega (1+x^2+2y^2)dxdy, \qquad \Omega = \Omega_1\cup\Omega_2,$
$\Omega_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{x}\},$
$\Omega_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 1\le x\le 2, 0\le y\le 1/x\}$ $\qquad [\log 2 + \frac{1247}{420}]$

16. $\displaystyle\iint_\Omega (x+y)dxdy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{10}\le 1\right\}$ $\qquad [0]$

17.* $\iint_\Omega (2xy - y^2)dxdy, \qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 2x - 3 \leq 0\}$ $[-\pi]$

- Calcolare l'area della regione delimitata dai grafici $y = x^3 - x$ e $y = 3x - x^3$ per valori di $x \in [0, \sqrt{2}]$. [2]
- Calcolare il baricentro di una lamina piana descritta da $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 || x| \leq 2, x^2 \leq y \leq 9\}$. $[(0, \frac{1167}{230})]$
- Calcolare il baricentro di una lamina descritta dalla parte di piano interna alla circonferenza $x^2 + y^2 = 25$ e situata nel primo quadrante. $[(\frac{20}{3\pi}, \frac{20}{3\pi})]$
- Calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione della parte di piano delimitata da $y^2 = 9x$ e $x = 1$ intorno all'asse delle y. $[\frac{24\pi}{5}]$