

Esercizi sulle serie

Esercizio 1 Calcolare la somma di ciascuna delle seguenti serie

$$(a) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}, \quad (b) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\pi^{k+1}}{5^{3k}}, \quad (c) \sum_{k=2}^{+\infty} \log \left(1 - \frac{1}{k^2} \right).$$

((a) e (c) sono serie telescopiche).

Esercizio 2 Dire per quali valori del parametro reale α converge ciascuna delle seguenti serie.

$$(a) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{k^3 \alpha^2 + 1}, \quad (b) \sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha^2 + 4\alpha + 3)^k,$$

Esercizio 3 Stabilire se le seguenti serie a termini positivi convergono o divergono, precisando il criterio utilizzato.

$$(a) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{1/k}}{k!}, \quad (b) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{e^{2k}}, \quad (c) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3k^2 + 1}{k^4 + 1}$$
$$(d) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(\log k)^{k/2}}, \quad (e) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k + k}, \quad (f) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-k}}{k^2}$$
$$(g) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin \left(\frac{1}{k+1} \right), \quad (h) \sum_{k=1}^{+\infty} \arctan \left(\frac{1}{k^2} \right), \quad (i) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\binom{k+3}{k}}$$
$$(l) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k-1)^4}{(3k^3 + 5)k!}, \quad (m) \sum_{k=1}^{+\infty} \log \left(\frac{k+2}{k+4} \right), \quad (n) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k!}}$$

Esercizio 4 Data una circonferenza di raggio R , si consideri il triangolo equilatero inscritto, quindi una seconda circonferenza inscritta in questo triangolo, poi ancora un triangolo equilatero inscritto nella seconda circonferenza, e così via. Calcolare la somma delle aree degli infiniti triangoli così ottenuti.