

Campi conservativi

Esercizio 1 Dire se i seguenti campi sono conservativi e in caso affermativo trovare i potenziali

1.

$$F(x, y) = \left(\frac{2x + y}{(x^2 + xy)^{2/3}}, \frac{x}{(x^2 + xy)^{2/3}} + 2y \right)$$

definito in $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y + x > 0\}$.

2.

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} + 1, \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} + 3 \right)$$

in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

3. $F(x, y) = (3x^2y + 3x, x^3 + \sin^2(y))$

4. $F(x, y) = (x + y^2, 2xy + y^3)$

Esercizio 2 Dire se il campo $F(x, y) = -y\hat{i} + x\hat{j}$ è conservativo e calcolare la circuitazione lungo l'ellisse $\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 3 Trovare un potenziale del campo $F(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}\hat{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\hat{j}$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e calcolare

- la circuitazione lungo l'ellisse $3x^2 - xy + 10y^2 = 1$
- il lavoro lungo l'arco di parabola di equazione $y = 1 + x^2$, $x \in [0, 2]$.