ANALISI MATEMATICA 1 Versione A 07/09/2015	COGNOME e Nome firma

Per tutti gli esercizi indicare, nei riquadri corrispondenti, i passaggi essenziali della risoluzione.

1. **[8 pt]** Sia $f(x) = x\log^2 x$. Determinare: a) dominio, limiti agli estremi del dominio e eventuali asintoti; b) intervalli di monotonia, eventuali punti di non derivabilità e loro natura; c) eventuali estremi; d) grafico qualitativo di f.

$\mathrm{dom} f = (0,+\infty)$; $\lim_{x\to 0^+} x\log^2 x = 0$; $\lim_{x\to +\infty} x\log^2 x = +\infty$; $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

non esistono asintoti

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathrm{dom} f$

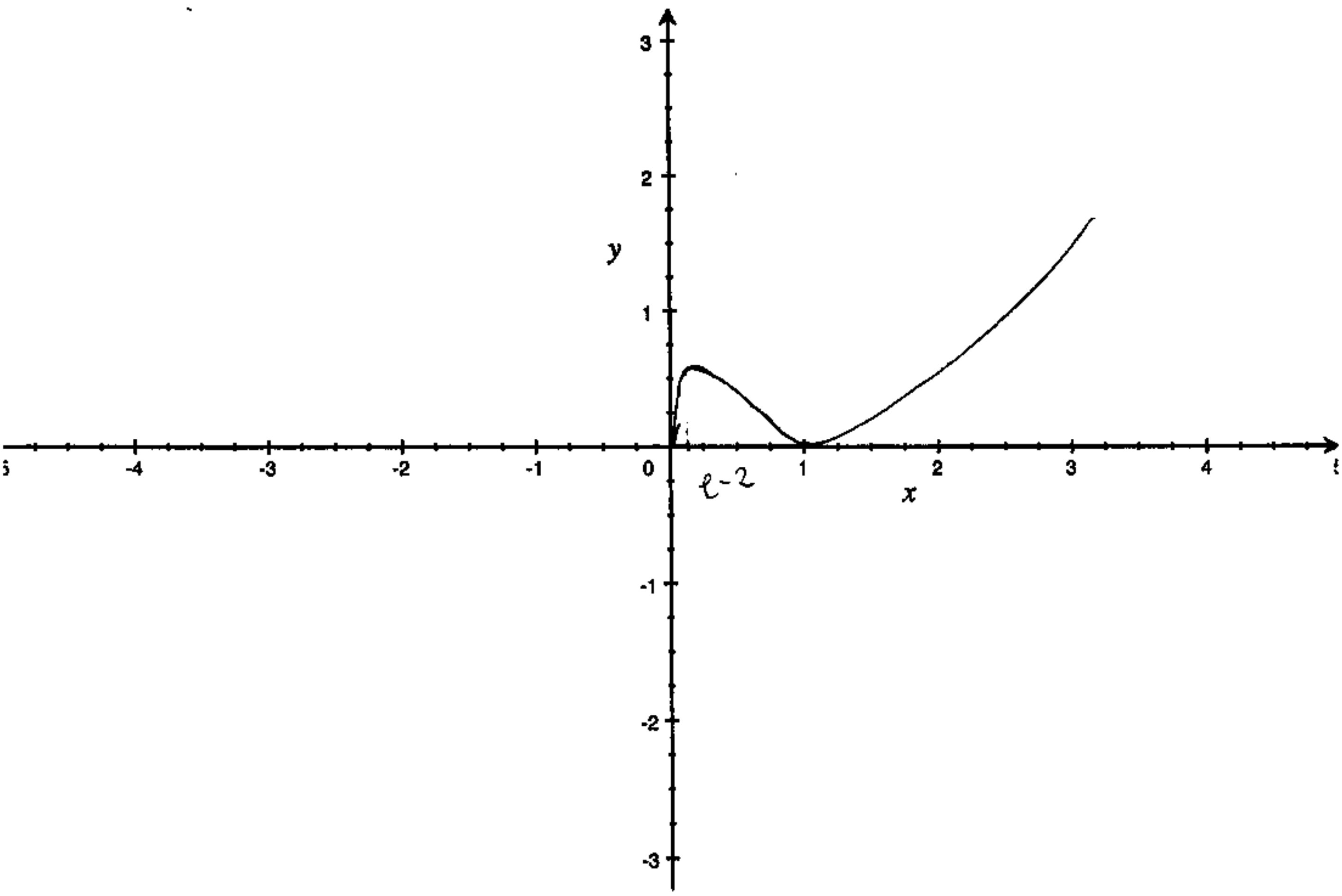
$f'(x) = \log^2 x + x \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x} = \log x(\log x + 2) \geq 0 \iff x \in (0, e^{-2}) \cup (1,+\infty)$

	0	e^{-2}	1	
$\log x > 0$		- - -	- - -	———
$\log x + 2 > 0$		- - -	———	———

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$

$x = e^{-2}$ punto di max locale

$x = 1$ " " min globale



2. **[5 pt]** Si consideri l'equazione differenziale lineare $y' = \frac{2}{x}y + \frac{x+1}{x}$.

Trovare l'integrale generale nell'intervallo $I = (0, +\infty)$.

$y' - \frac{2}{x}y = \frac{x+1}{x}$; $A(x) = \int -\frac{2}{x}dx = -2\log x \quad (x>0)$; $e^{A(x)} = \frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = \frac{x+1}{x^3}$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = \frac{x+1}{x^3}$; $\frac{1}{x^2}y(x) = \int \frac{x+1}{x^3}dx + c$

$\frac{1}{x^2}y(x) = \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{x^3}dx + c$; $y(x) = x^2\left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right] + cx^2$

$\boxed{y(x) = -x - \frac{1}{2} + cx^2}$

Trovare la soluzione con condizione $y(\frac{1}{2}) = 0$.

$y(\frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow 0 = -1 + \frac{c}{4} \Leftrightarrow c = 4$

$y(x) = -x - \frac{1}{2} + 4x^2$

3. **[5 pt]** Studiare $\lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 1\right]x$.

$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 1 = x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\log(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{2}$$

con Maclaurin o con De L'Hopital

4. **[4 pt]** Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(4n^2\log\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)\right)^n$.

Applico il cr. della radice:

$$\sqrt[n]{\left(4n^2\log\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)\right)^n} = 4n^2\log\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4n^2}{n^2+1} \longrightarrow 4 > 1 \Rightarrow \text{la serie diverge}$$

5. **[4 pt]** Discutere la convergenza dell'integrale $\int_0^1 \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \log(1+x^3)}\, dx$, al variare di $\alpha \geq 0$.

Occorre studiare il comportamento vicino a $x=0$ di

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x^7}{x^\alpha \log(1+x^3)}$$

Con gli sv. elementari si trova $f(x) \sim \frac{x^7}{x^\alpha \cdot x^3} = \frac{1}{x^{\alpha-4}}$

per $x \to 0^+$; Pertanto l'integrale converge se e solo se

$$\alpha - 4 < 1 \iff \alpha < 5$$

6. **[4 pt]** Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $4z^2 - 12z + 13 + 4i = 0$.

$$\frac{\Delta}{4} = 6^2 - 4(13+4i) = -16-16i = 16(-1-i) = 16\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i}$$

$$\sqrt{\frac{\Delta}{4}} = \pm 4\sqrt[4]{2}\, e^{\frac{5}{8}\pi i}$$

Quindi $z_{1/2} = \frac{6 \pm 4\sqrt[4]{2}\, e^{\frac{5}{8}\pi i}}{4} = \frac{3 \pm 2\sqrt[4]{2}\, e^{\frac{5}{8}\pi i}}{2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{5}{8}\pi i}$

Rappresentare infine le soluzioni nel piano di Gauss: