1) $f(x) = \log|x^2-2x-1|$

a) $|x^2-2x-1|>0 \iff |x^2-2x-1| \neq 0 \iff x^2-2x-1 \neq 0$

$x \neq 1 \pm \sqrt{2}$ $\quad\quad$ $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1 \pm \sqrt{2}\}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1\pm\sqrt{2}} f(x) = -\infty$ $\quad\quad$ $x = 1+\sqrt{2}$; $x = 1-\sqrt{2}$

ASINTOTI VERTICALI

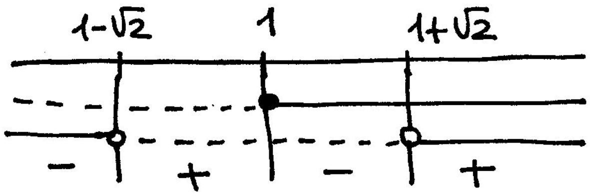
b) $$f(x) = \begin{cases} \log(x^2-2x-1) & x<1-\sqrt{2} \quad x>1+\sqrt{2} \\ \log(-x^2+2x+1) & 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-2}{x^2-2x-1} & x<1-\sqrt{2}, \ x>1+\sqrt{2} \\ \dfrac{-2x+2}{-x^2+2x+1} = \dfrac{2x-2}{x^2-2x-1} & 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

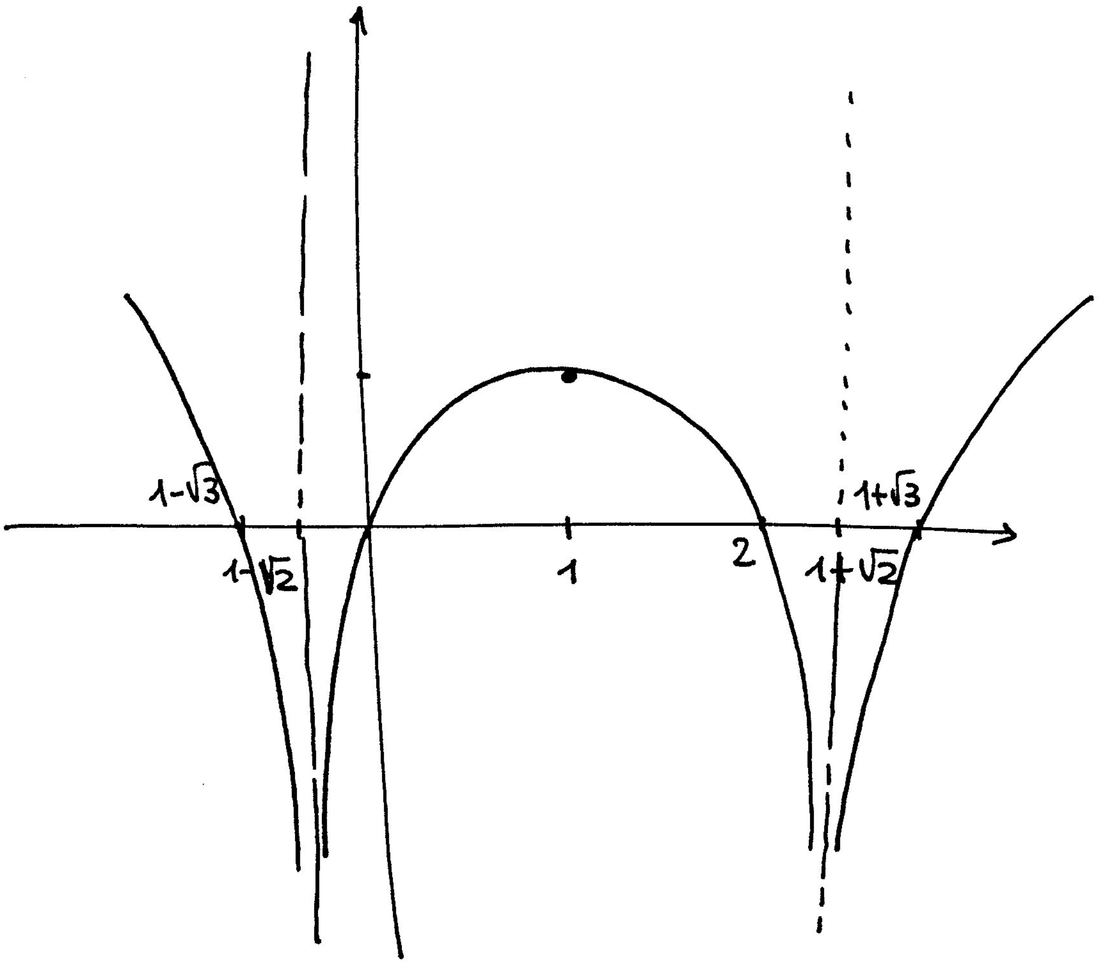
Quindi $\quad f'(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x-1} \quad \forall x \in \text{dom} f$

N.B. I punti $1 \pm \sqrt{2}$ non sono nel dominio di f; pertanto non serve studiare f' in quei punti.

$f'(x) \geq 0 \iff 1-\sqrt{2} < x \leq 1$ oppure $x > 1+\sqrt{2}$



e) $x = 1$ punto di max locale $\qquad f(1) = \log 2$



$$f(x) = 0 \iff |x^2 - 2x - 1| = 1 \iff x^2 - 2x - 1 = 1 \quad \vee \quad x^2 - 2x - 1 = -1$$

$$\iff x = 0, 2, 1 \pm \sqrt{3}$$

2)

$$y' = 2(y^2 - 4y + 3)$$

$$b(y) = y^2 - 4y + 3$$

$y = y_0$ soluz. costanti $\iff$ $b(y_0) = 0$

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \iff y = 1, 3$$

$y = 1$, $y = 3$ soluzioni costanti

$$y' = 2(y-1)(y-3)$$

$$\int \frac{dy}{(y-1)(y-3)} = \int 2\,dx$$

$$\int \frac{1}{2} \frac{1}{y-3}\,dy - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y-1}\,dy = 2x + c$$

$$\frac{1}{2} \log \left|\frac{y-3}{y-1}\right| = 2x + c$$

$$\left|\frac{y-3}{y-1}\right| = e^{4x} \cdot k \qquad (k = e^c)$$

$$\frac{y-3}{y-1} = k' e^{4x} \qquad k' \in \mathbb{R}$$

$$(*) \qquad y = \frac{3 - k' e^{4x}}{1 - k' e^{4x}}, \qquad k' \in \mathbb{R}$$

INTEGRALE GENERALE

Imponendo la condizione iniziale in $(*)$:

$$2 = \frac{3 - k'}{1 - k'} \iff k' = -1$$

La soluzione del PdC è $\quad y(x) = \dfrac{3+e^{4x}}{1+e^{4x}}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$

in quanto x^α è infinitesima per $x\to 0^+$ $(\alpha>0)$
e $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ è limitata

Pertanto g si estende con continuità in $x=0$
con $g(0)=0$.

Per la derivabilità, occorre studiare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

Se $\alpha-1>0$, come prima si deduce che il limite è 0.

Se $\alpha-1\leq 0$ il limite suddetto non esiste in quanto $\sin\frac{1}{x}$ non ammette limite per $x\to 0^+$.

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0 \quad e \quad \operatorname{sen}\frac{1}{x_n} = 0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \to 0 \quad e \quad \operatorname{sen}\frac{1}{y_n} = 1 \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Se $\boxed{\alpha=1}$: $\quad x_n^{\alpha-1}\operatorname{sen}\frac{1}{x_n} = \operatorname{sen}\frac{1}{x_n} = 0 \longrightarrow 0$

mentre $\quad y_n^{\alpha-1}\operatorname{sen}\frac{1}{y_n} = 1 \longrightarrow 1$

Se $\boxed{\alpha<1}$: $\quad x_n^{\alpha-1}\operatorname{sen}\frac{1}{x_n} = 0 \longrightarrow 0$

mentre $\quad y_n^{\alpha-1}\operatorname{sen}\frac{1}{y_n} = y_n^{\alpha-1} \longrightarrow +\infty$

Quindi g è derivabile da destra in $x=0$ solo per $\alpha>1$ e $g'_+(0)=0$.

4) Applicando il criterio del rapporto:

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{n^n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{n^n}=$$

$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}\longrightarrow e\cdot 0=0<1$$

$\Rightarrow$ la serie converge.

5) La funzione $\dfrac{1}{x^2+2x+5}$ è definita e continua in $\mathbb{R}$.

Occorre discutere la convergenza dell'integrale solo a $+\infty$. Siccome $\dfrac{1}{x^2+2x+5}\sim\dfrac{1}{x^2}$ per $x\to+\infty$

e $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ è convergente, per il CR. di CONFR. ASINT.

anche $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+5}dx$ è convergente.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\lim_{R\to+\infty}\int_1^R\frac{1}{x^2+2x+5}dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}\,dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

$$\int_1^R \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{R+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \lim_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{R+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$$

6) Per la legge di annullamento del prodotto:

$z^4+16=0 \quad \vee \quad i\bar{z}-1=0$

$z^4=-16$

$z^4=16e^{i\pi}$

$z_k=\sqrt[4]{16}\; e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}\quad ; k=0,1,2,3$

$\bar{z}=\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}$

$\bar{z}=-i$

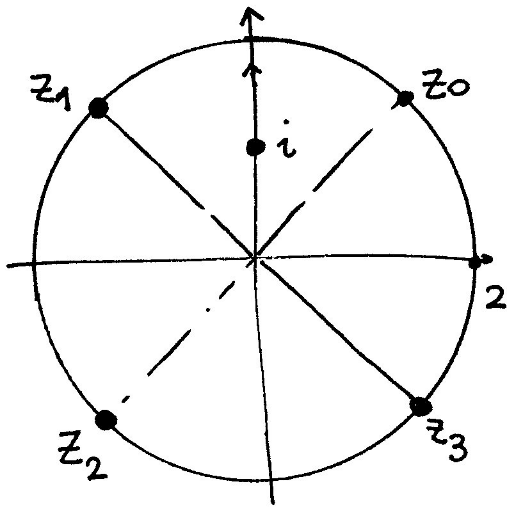
$z=i$

$z_0=2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$z_1=2e^{i\frac{3}{4}\pi} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$z_2=2e^{i\frac{5}{4}\pi} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$z_3=2e^{i\frac{7}{4}\pi} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



Le soluzioni sono $\{i, \sqrt{2}+i\sqrt{2}, \sqrt{2}-i\sqrt{2}, -\sqrt{2}+i\sqrt{2}, -\sqrt{2}-i\sqrt{2}\}$