$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 5x - 6|}$$

- $\text{dom} f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5x - 6}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 5x - 6} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 5x - 6} + x}{\sqrt{x^2 - 5x - 6} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-5x - 6}{\sqrt{x^2 - 5x - 6} + x} = -\frac{5}{2}$$

$y = x - \frac{5}{2}$ asintoto obliquo dx

<u>Analogamente</u> $y = -x + \frac{5}{2}$ asintoto obliquo sx

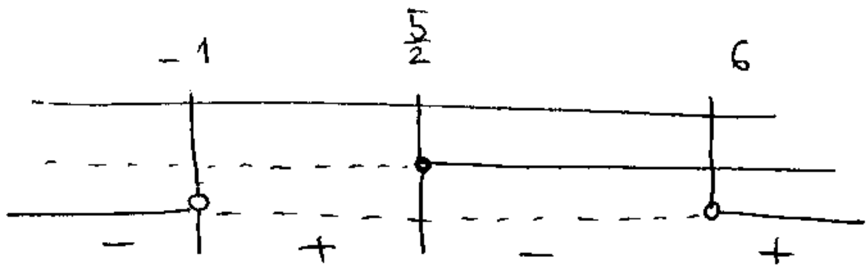
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 5x - 6} & \text{se } x \leq -1 \lor x \geq 6 \\ \sqrt{-x^2 + 5x + 6} & \text{se } -1 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x - 6}} & \text{se } x < -1 \lor x > 6 \\ \dfrac{-2x + 5}{2\sqrt{-x^2 + 5x + 6}} & \text{se } -1 < x < 6 \end{cases}$$

Si può anche scrivere

$$f'(x) = \frac{2x - 5}{2\sqrt{|x^2 - 5x - 6|}} \cdot \frac{x^2 - 5x - 6}{|x^2 - 5x - 6|} \qquad x \neq -1, 6$$

$f' \geq 0 \iff (2x-5)(x^2-5x-6) \geq 0$

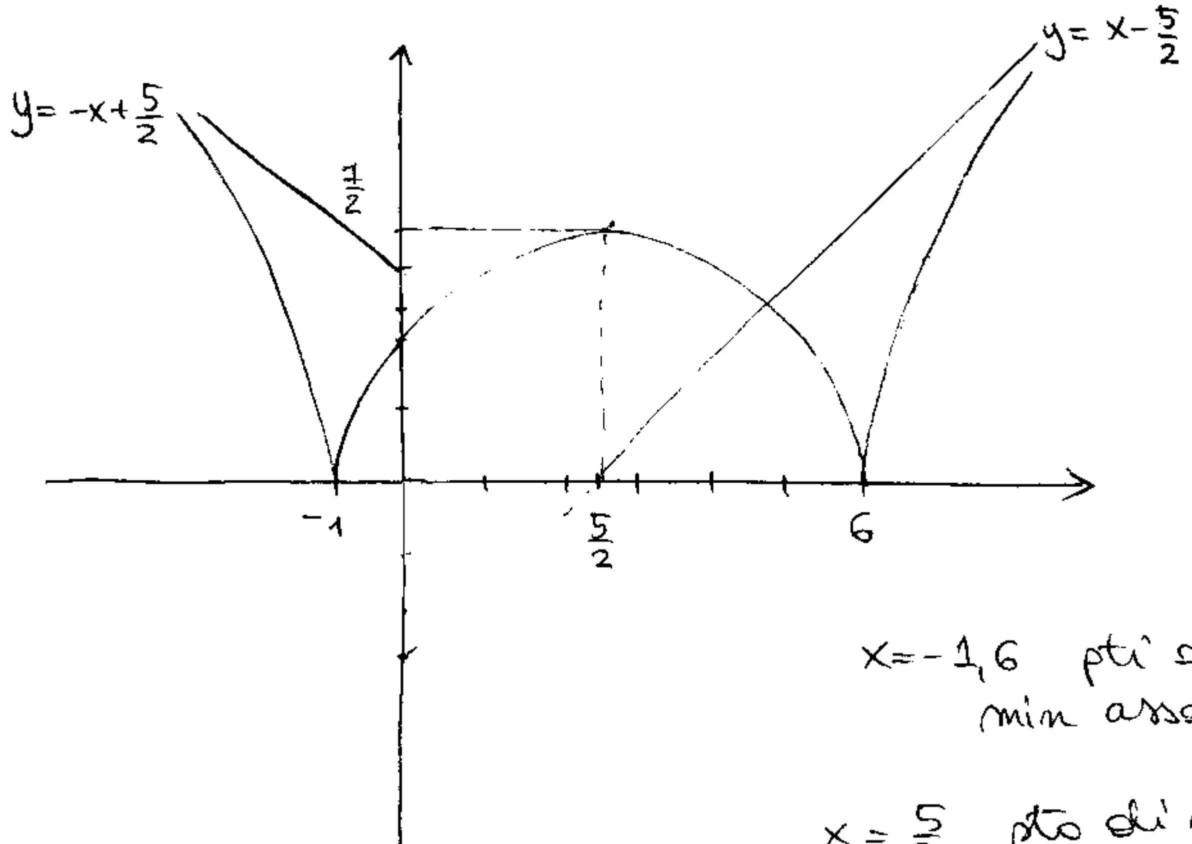


$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -1^+} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 6^-} f'(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to 6^+} f'(x) = +\infty$$

$x=-1$ e $x=6$ cuspidi

$f \geq 0$ in $\mathbb{R}$



$x = -1, 6$ pti di min assoluto

$x = \frac{5}{2}$ pto di max relativo

ESERCIZIO 2

$$y'' + 5y' - 6y = 0$$

$$\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0 \qquad \lambda_{1/2} = \frac{-5 \pm 7}{2} \begin{cases} -6 \\ 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-6x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

integrale generale dell'eq. <u>omogenea</u>

y_p soluzione particolare dell'eq. <u>completa</u>:

cerchiamo $y_p = y_1 + y_2$ (princ. di sovrapposizione)

dove y_1 risolve l'eq. $y'' + 5y' - 6y = xe^{x}$ $*$

e y_2 " " $y'' + 5y' - 6y = 1$ $**$

Poniamo

$$y_1 = (Ax + B)\, x\, e^{x}$$
$$y_2 = C$$

con A, B, C costanti reali da determinare.

Imponendo che y_1 e y_2 siano soluzioni di $*$ e $**$, rispettivamente, si trova

$$A = \frac{1}{14}$$
$$B = -\frac{1}{49}$$
$$C = -\frac{1}{6}$$

Quindi

$$y_p = \left(\frac{1}{14}x^2 - \frac{1}{49}x\right)e^{x} - \frac{1}{6}$$

ESERCIZIO 3

Sviluppando con la formula di MacLaurin:

$$\sin(2x) = 2x - \frac{8x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{4x^2}{2} + o(x^2)$$

$$2x\cos(2x) = 2x - 4x^3 + o(x^3)$$

$$\operatorname{sen}(2x) - 2x\cos(2x) = \cancel{2x} - \frac{4}{3}x^3 - \cancel{2x} + 4x^3 + o(x^3)$$

$$= \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$2x^2 \sin(3x) = 6x^3 + o(x^3)$$

Quindi il limite dato vale $\frac{4}{9}$

ESERCIZIO 4

Per la convergenza assoluta, studiamo $\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3+1} e^{-n}}_{(*)}$

Appl. il crit. del rapporto:

$$\frac{n+2}{[(n+1)^3+1]\cdot e^{n+1}} \cdot \frac{(n^3+1)e^n}{n+1} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$

La serie (*) converge e dunque la serie data converge assolutamente. Per il CR. di conv. assoluta, la serie data conv. anche semplicemente.

ESERCIZIO 5

$f(x) = \frac{e^{-3x}}{x^\alpha}$ è positiva in $(0, +\infty)$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = I_1 + I_2$$

- Per $x \to 0$ $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$; siccome $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ è finito se e solo se $\alpha < 1$, anche I_1 è finito se e solo se $\alpha < 1$ (CR. confronto asintotico)

- Per $x > 1$ $f(x) \leq e^{-3x}$ (per ogni $\alpha \geq 0$)
 Siccome $\int_1^{+\infty} e^{-3x}\,dx$ converge, per il CR. di confronto, anche I_2 converge.

In definitiva, l'integrale dato converge per $\alpha < 1$.

ESERCIZIO 6

$|z|^2 = z\bar{z} \Rightarrow (2+2i)\bar{z} - \bar{z}z^2 = 0$

$$\bar{z}\left(2+2i - z^2\right) = 0$$

$$\bar{z} = 0 \quad \vee \quad z^2 = 2+2i$$

$$\Downarrow$$

$$z = 0$$

$2+2i = \sqrt{8}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z^2 = \sqrt{8}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_1 = \sqrt[4]{8}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$

$z_2 = -\sqrt[4]{8}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$