| ANALISI MATEMATICA 1<br>Corso di Laurea in Ing. Edile e Architettura<br>11/07/2016 (A) | COGNOME e Nome | firma |
|---|---|---|

**1.** **[5 pt]** (a) Determinare il dominio di $f(x) = \dfrac{\log(\sqrt{x^2-2})}{|x-5|}$.

$\operatorname{dom} f = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 5) \cup (5, +\infty)$

(b) Determinare gli asintoti di $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{e^x - 1}$.

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ; $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ ; $\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ ; $\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$

$y=0$ A.O. a $+\infty$

$x=0$ A.V.

**2.** **[6 pt]** Calcolare la derivata prima di $h(x) = \sqrt[3]{|x|(x-1)}$, specificando il dominio di $h'$.

$$h'(x) = \frac{1}{3}\,\frac{\frac{x}{|x|}(x-1)+|x|}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}} = \frac{2x^2 - x}{3|x|\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}$$

$x \neq 0$ e $x \neq 1$

Studiare i punti di non derivabilità di $h$.

$h(x) \sim -\sqrt[3]{|x|}$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$ $x=0$ cuspide

$h(x) \sim \sqrt[3]{(x-1)}$ per $x \to 1$ $\Rightarrow$ $x=1$ punto di flesso a tg verticale

Determinare gli intervalli in cui $h$ è crescente e quelli in cui $h$ è decrescente.

$h' \geq 0 \iff 2x^2 - x \geq 0 \iff x<0 \vee x \geq \frac{1}{2}$ ($h$ crescente)

$h$ decrescente in $]0, \frac{1}{2}[$ .

**3.** **[6 pt]** Calcolare i seguenti limiti

$$(a)\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{(1-\cos^2 x)e^{-x}}.$$

(a) $\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}} \sim \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)} \longrightarrow \dfrac{1}{e}$

(b) $\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{(1-\cos^2 x)\,e^{-x}} = \dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{\operatorname{sen}^2 x\ e^{-x}} \sim \dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}$ per $x\to 0$

$\Rightarrow$ il limite (b) è $-\frac{1}{2}$

**4.** **[4 pt]** Stabilire il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2 2^n}$, motivando la risposta.

$0 \leq \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^2\cdot 2^n} \leq \dfrac{\pi/2}{n^2 2^n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$ converge

per il CR. del rapporto:

$\dfrac{n^2 2^n}{(n+1)^2 2^{n+1}} \longrightarrow \dfrac{1}{2} < 1$

**5. [5 pt]** Calcolare l'integrale $\int \frac{x^2+7}{x^2+6x+9}\,dx$.

$$\frac{x^2+7}{x^2+6x+9} = \frac{x^2+6x+9}{x^2+6x+9} + \frac{7-6x-9}{x^2+6x+9} = 1 - \frac{6x+2}{x^2+6x+9} =$$

$$= 1 - \frac{3\left(2x+\frac{2}{3}\right)}{x^2+6x+9} = 1 - 3 \cdot \frac{2x+6}{x^2+6x+9} - 3\,\frac{\left(\frac{2}{3}-6\right)}{x^2+6x+9}$$

$$\int \frac{x^2+7}{x^2+6x+9}\,dx = x - 3\log(x^2+6x+9) - 16(x+3)^{-1} + c$$

$$= x - 6\log|x+3| - \frac{16}{x+3} + c$$

L'integrale $\int_{-3}^{1} \frac{x^2+7}{x^2+6x+9}\,dx$ converge? Motivare la risposta.

$$I = +\infty \left( = \lim_{b \to -3^+} \left[ x - 6\log|x+3| - \frac{16}{x+3} \right]_b^1 \right)$$

**6. [4 pt]** Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $|z-2|^2 = |\bar{z}-1|^2 + z^2$ e rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss.

$z = x + iy$

$(x-2)^2 \cancel{+y^2} = (x-1)^2 \cancel{+y^2} + x^2 - y^2 + 2ixy \; ; \; -4x + 4 = 1 - 2x + x^2 - y^2 + 2ixy$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x - 3 = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \quad x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -3, 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} -y^2 - 3 = 0 \quad \text{imp.} \\ x = 0 \end{cases}$$

$z = -3, 1$
(reali)