ANALISI MATEMATICA 1 Corso di Laurea in Ing. Edile e Architettura 26/06/2017	COGNOME e Nome	firma

1. [8 pt] Sia $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$. Determinare $dom f =$ $]0, +\infty[$

f è simmetrica (pari o dispari)? (giustificare la risposta)

Non ha senso visto che $f(x)$ è definita solo per $x>0$

Determinare i limiti agli estremi del dominio e eventuali asintoti:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ $\quad x=0$ Asintoto verticale

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x} + e^{\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)$$

Stabilire gli intervalli di monotonia di f ed eventuali estremi:

$f' > 0 \iff \frac{\sqrt{x}}{2} - 1 > 0 \iff x > 4$

f crescente in $]4, +\infty[$

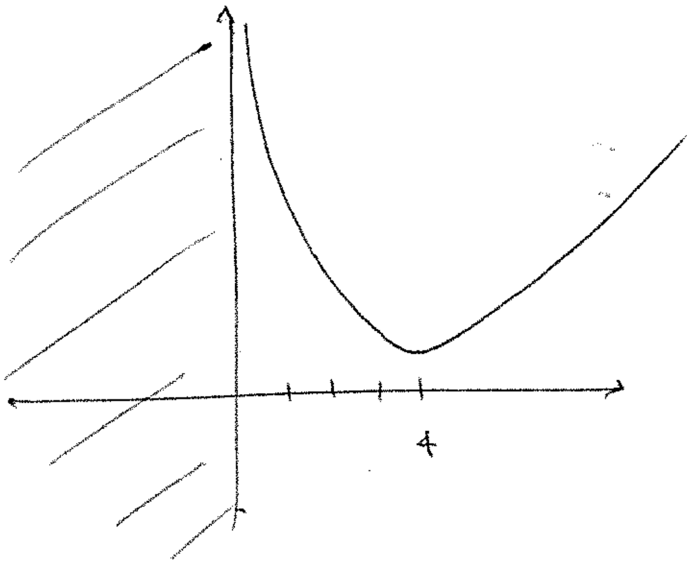
f decresc. in $]0, 4]$

Dire se f è invertibile nel suo dominio e, in caso affermativo, calcolare la sua inversa:

No, non è iniettiva

(Una retta orizzontale può intersecare il grafico di f in 2 punti)

Disegnare il grafico qualitativo di $f(x)$.



2. [4 pt] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}\ \sin^2(x-1)}{(1+x)^3 \log^2(x)}.$$

$t = x - 1$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t+1}\ \operatorname{sen}^2 t}{(2+t)^3 \log^2(1+t)} \underset{\uparrow}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t+1}\ \cancel{t^2}}{(2+t)^3\ \cancel{t^2}} = \frac{1}{8}$$

sv. di MacLaurin
di sin t e log(1+t)

3. [5 pt] Per ciascuna delle seguenti funzioni, stabilire il dominio e studiare continuità e derivabilità nel dominio. Classificare gli eventuali punti di non derivabilità:

$$f(x) = |x^2| \qquad g(x) = x\log(x^2).$$

$f(x) = x^2$ perchè $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. In quanto funz. potenza con esponente pari, f è derivabile in $\mathbb{R}$

$g(x)$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. g è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ in quanto composizione di funz. derivabili.

Per $x=0$: $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (gerarchia degli infiniti)

e $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \log(x^2) = -\infty$

$x=0$ pto di flesso a tg verticale

4. [4 pt] Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1+\sqrt{n}}{2n}$.

CONV. ASS: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{2n}$ diverge dato che il termine generale $\frac{1+\sqrt{n}}{2n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$

CONV. SEMP. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ convergono per il cr. di Leibniz.

Quindi la serie data converge.

5. [5 pt] Calcolare l'integrale $\int \sqrt{x} \arctan(\sqrt{x})\, dx$.

$t = \sqrt{x} \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \quad \Rightarrow \quad 2t\,dt = dx$

$\int t \operatorname{arctg} t \; 2t\,dt = 2\int t^2 \operatorname{arctg} t\, dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\operatorname{arctg} t - \int \frac{t^3}{3(1+t^2)}\right]$

$= \frac{2}{3} t^3 \operatorname{arctg} t - \frac{2}{3}\int \frac{t(t^2+1-1)}{t^2+1}\, dt =$

$= \frac{2}{3} t^3 \operatorname{arctg} t - \frac{2}{3}\int t\, dt + \frac{2}{3}\int \frac{t}{t^2+1}\, dt$

$= \frac{2}{3} t^3 \operatorname{arctg} t - \frac{2}{3}\cdot\frac{t^2}{2} + \frac{1}{3}\log(1+t^2) + c$

L'integrale è : $\frac{2}{3} x^{3/2} \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}\log(1+x) + c$

6. [4 pt] Calcolare le radici settime di $(-1+\sqrt{3}i)^7$.

$-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i \operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi\right)$

$(-1+\sqrt{3}i)^7 = 2^7\left(\cos\frac{14}{3}\pi + i\operatorname{sen}\frac{14}{3}\pi\right) = 2^7\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi\right)$

A questo punto si calcolano le radici settime con la formula

$w_0 = 2\left(\cos\frac{2}{21}\pi + i\operatorname{sen}\frac{2}{21}\pi\right)$

$w_1 = 2\left(\cos\frac{8}{21}\pi + i\operatorname{sen}\frac{8}{21}\pi\right)$

$w_2 = 2\left(\cos\frac{14}{21}\pi + i\operatorname{sen}\frac{14}{21}\pi\right) = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi\right)$

$w_3 = 2\left(\cos\frac{20}{21}\pi + i\operatorname{sen}\frac{20}{21}\pi\right)$

$w_4 = 2\left(\cos\frac{26}{21}\pi + i\operatorname{sen}\frac{26}{21}\pi\right)$

$w_5 = 2\left(\cos\frac{32}{21}\pi + i\operatorname{sen}\frac{32}{21}\pi\right)$

$w_6 = 2\left(\cos\frac{38}{21}\pi + i\operatorname{sen}\frac{38}{21}\pi\right)$