1

RISOLTA

ANALISI MATEMATICA 1 Versione A 26/02/2015	COGNOME e Nome firma

Per tutti gli esercizi indicare, nei riquadri corrispondenti, i passaggi essenziali della risoluzione.

1. [8 pt] Sia $f(x) = e^x(|x^2 - 2x| - 1)$. Determinare: a) dominio, limiti agli estremi del dominio e eventuali asintoti; b) intervalli di monotonia, eventuali punti di non derivabilità e loro natura; c) eventuali estremi; d) grafico qualitativo di f.

a) $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asint. orizz. a $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

b) $f'(x) = \begin{cases} e^x(x^2-3) & x<0 \vee x>2 \\ e^x(1-x^2) & 0<x<2 \end{cases}$

f crescente in $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0,1) \cup (2, +\infty)$

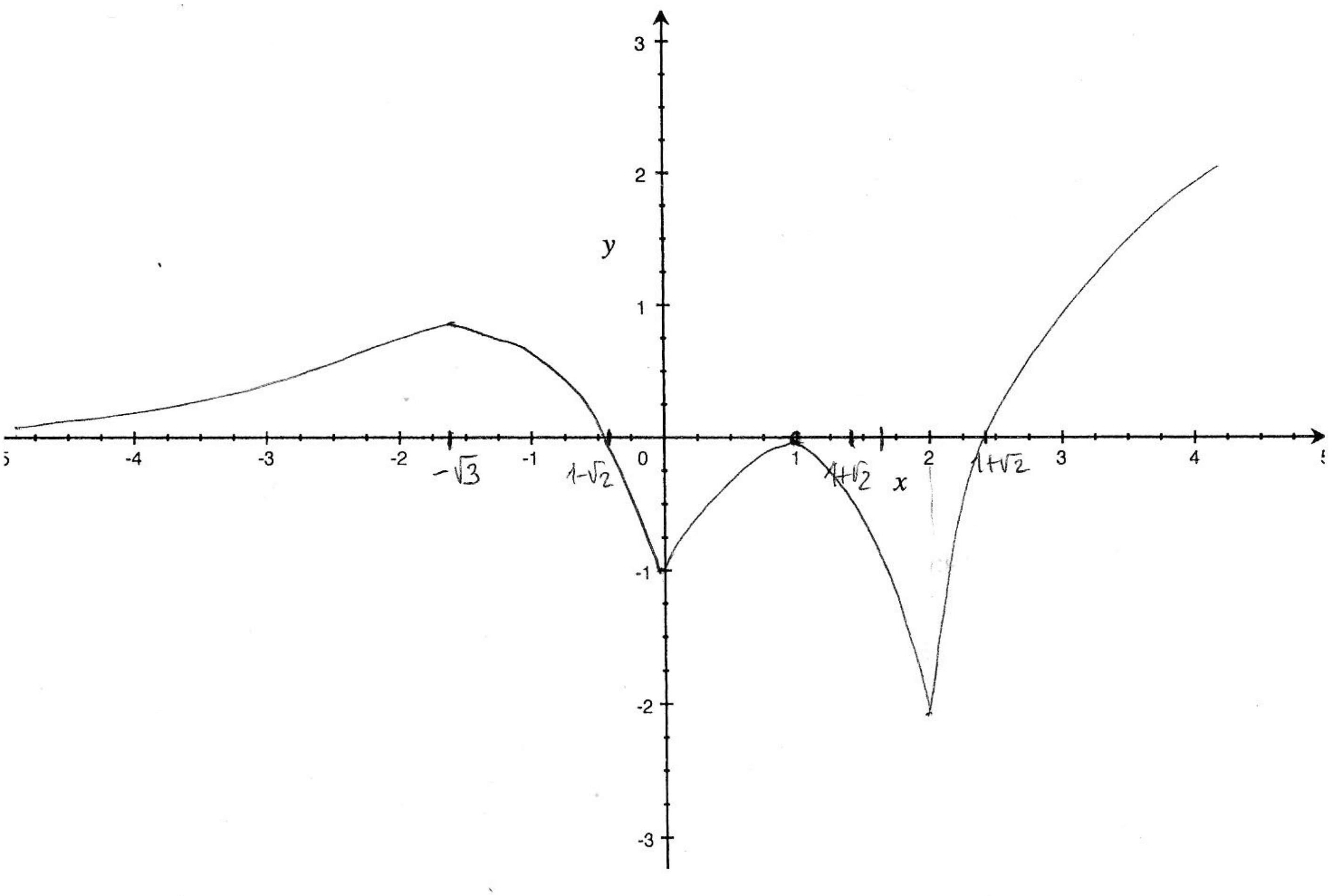
f decrescente in $(-\sqrt{3}, 0) \cup (1, 2)$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -3$; $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$

$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -3e^2$; $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = e^2$ $x=0$, $x=2$ punti angolosi

$x=0/x=2$ pti di min loc/glob ; $x=-\sqrt{3}$ pto di max locale

$x=1$ pto di max locale



2. [5 pt] Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' + \frac{2x}{1+x^2}\, y = \frac{1}{x}$.

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(\log|x| + \frac{x^2}{2}\right) + \frac{c}{1+x^2}$$ solo per $x>0$ oppure $x<0$

$$y(x) = e^{-A(x)}\left\{c + \int f(x)\, e^{A(x)}\, dx\right\} \qquad A(x) = \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

Trovare la soluzione del Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \frac{2x}{1+x^2}\, y = \frac{1}{x} \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(\log x + \frac{x^2}{2}\right) + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}; \quad x>0$$

3. [4 pt] Scrivere il polinomio di MacLaurin di secondo grado della funzione $2\sin x - \log(1+2x)$.

$$P_2(x) = 2x - \left(2x - \frac{1}{2}4x^2\right) = \cancel{2x} \cancel{-2x} + 2x^2$$

Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite $\lim_{n\to+\infty}\left(2\sin\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)n^\alpha$.

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^\alpha}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} 2n^{\alpha-2} = \begin{cases} 2 & \alpha=2 \\ +\infty & \alpha>2 \\ 0 & \alpha<2 \end{cases}$$

[usando la prima parte con $x=\frac{1}{n}$:
$2\sin\frac{1}{n} - \log(1+2/n) = 2/n^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$]

4. [4 pt] Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n}}{n^\alpha}$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cr. Radice $\sqrt[n]{\frac{e^{-n}}{n^\alpha}} = \frac{e^{-1}}{(\sqrt[n]{n})^\alpha} \longrightarrow e^{-1} < 1 \Rightarrow$ converge $\forall \alpha$

Calcolare la somma della serie per $\alpha = 0$.

$\alpha=0$ serie geom. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} - 1 = \frac{1}{e-1}$

5. [4 pt] Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{e^{\frac{1}{2x}}}{x^3}\,dx$. $= I$ **Suggerimento**: si consiglia il cambio di variabile $t = \frac{1}{x}$.

$$\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$$

$$I = \int \frac{e^{t/2}}{\frac{1}{t^3}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int t e^{t/2}\,dt \underset{\text{x parti}}{=} -2te^{t/2} + 2\int e^{t/2}\,dt$$

$$= -2te^{t/2} + 4e^{t/2} + c = 4e^{\frac{1}{2x}} - \frac{2}{x}e^{\frac{1}{2x}} + c$$

6. [5 pt] Scrivere il numero complesso $3 + \sqrt{3}i$ in forma esponenziale.

$$3 + \sqrt{3}i = \sqrt{12}\,e^{i\theta} \qquad tg\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^4 - 2 = 1 + \sqrt{3}i$.

$$z^4 = 3 + \sqrt{3}i \Rightarrow z_k = \sqrt[4]{\sqrt{12}}\,e^{i\theta_k}; \quad \theta_k = \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{4} \quad k = 0,1,2,3$$

$$z_k = \sqrt[8]{12}\,e^{i\theta_k}; \quad \theta_0 = \frac{\pi}{24}; \; \theta_1 = \frac{13}{24}\pi; \; \theta_2 = \frac{25}{24}\pi; \; \theta_3 = \frac{37}{24}\pi$$

Rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss: