CORREZIONE DEL COMPITO DEL 23/9/15

1) $f(x) = \sqrt[3]{x} \log|x|$

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (bisogna solo imporre che $\log|x|$ sia ben definito)

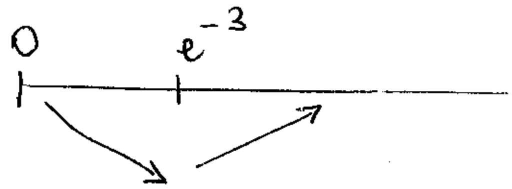
f dispari $\Rightarrow$ posso studiare f solo per $x>0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow f$ si prolunga con continuità in $x=0$

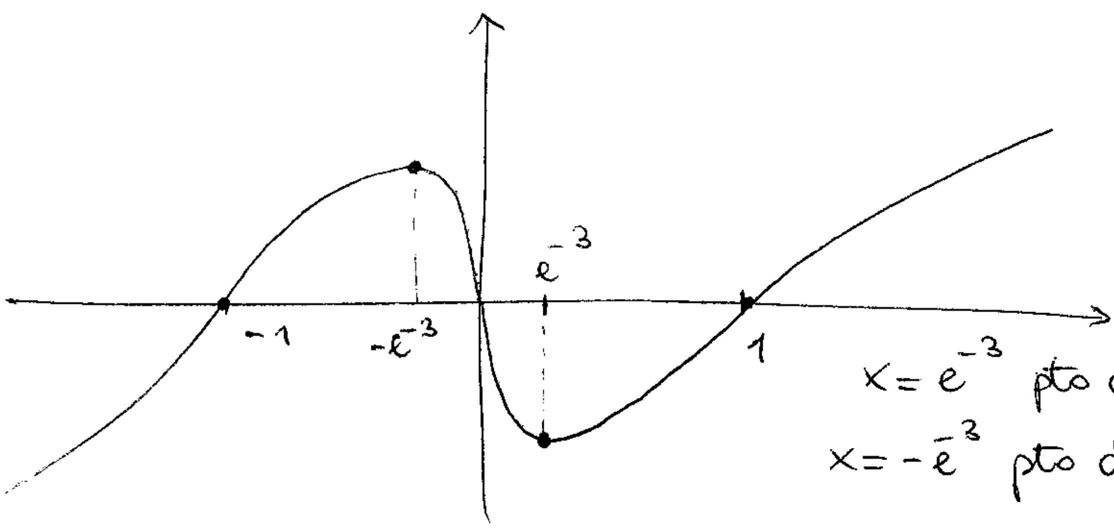
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \log x + x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x} = x^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{3} \log x + 1 \right) \quad \text{per } x>0$$

$f'(x) > 0 \iff \log x + 3 > 0 \iff x > e^{-3}$



$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty \Rightarrow x=0$ punto di flesso a tg verticale



$x = e^{-3}$ pto di min loc

$x = -e^{-3}$ pto di max loc

2) $y(x) = \sqrt{4 - e^{-x^2}}$ risolve l'eq. diff. $yy' = x(4-y^2)$

se sostituendo y e y' l'eq. risulta soddisfatta.

Osservo che $y \cdot y' = \frac{1}{2}(y^2)'$

Quindi I membro $= \frac{1}{2}\left(4 - e^{-x^2}\right)' = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} x e^{-x^2} = x e^{-x^2}$

II membro $= x\left(4 - 4 + e^{-x^2}\right) = x e^{-x^2}$

Questo prova che y è soluzione.

Per l'integrale generale (si tratta di un'eq. a variabili separabili) osservo che

$$y = \pm 2$$

sono soluzioni costanti. Per le soluzioni non costanti:

$$\int \frac{y\,dy}{4-y^2} = \int x\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\log|4-y^2| = \frac{x^2}{2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\log|4-y^2| = -x^2 - 2c$$

$$|4-y^2| = e^{-x^2} e^{-2c}$$

$$y^2 = 4 - k e^{-x^2} \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$y = \pm\sqrt{4 - k e^{-x^2}}$$

3) Effettuando il cambio di variabili: $x-1=t$

il limite diventa

$$\lim_{t\to 0} \frac{t\log(1+t)}{(e^{t+1}-e)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t\log(1+t)}{e^2(e^t-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{e^2} \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} \cdot \frac{t^2}{(e^t-1)^2} = \frac{1}{e^2}$$

4) Per la convergenza assoluta, studio la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} \operatorname{arctg} n$$

siccome $e^{-n} \operatorname{arctg} n \leq \frac{\pi}{2} e^{-n} \quad \forall n$

e siccome $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2} e^{-n}$ converge

per il cr. di confronto, anche $\sum_{n=1} e^{-n} \operatorname{arctg} n$

converge.

Per il cr. di conv. assoluta, anche

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-n} \operatorname{arctg} n \quad \text{converge}$$

5)
$$\int_0^1 x^\alpha \log x\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 x^\alpha \log x\, dx$$

Se $\alpha \neq -1$

$$\int x^\alpha \log x\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{x parti}}}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log x - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log x - \frac{1}{(\alpha+1)^2}x^{\alpha+1} + c$$

Se $\alpha = -1$

$$\int \frac{1}{x}\log x\, dx = \frac{(\log x)^2}{2} + c$$

$$\int_\varepsilon^1 x^\alpha \log x\, dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{(\alpha+1)^2} - \dfrac{\varepsilon^{\alpha+1}\log\varepsilon}{\alpha+1} + \dfrac{\varepsilon^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} & \text{se } \alpha \neq -1 \\[2ex] -\dfrac{1}{2}(\log\varepsilon)^2 & \text{se } \alpha = -1 \end{cases}$$

$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 x^\alpha \log x\, dx$ è finito se e solo se $\alpha+1>0$

ossia $\alpha > -1$.

Se $\alpha = -\frac{1}{2}$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-4 - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\log\varepsilon + 4\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right\}$

$$= -4$$

6) $$z = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^5}{(1-i)^6}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i = e^{\frac{5}{6}\pi i} \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^5 = e^{\frac{25}{6}\pi i}$$

$$1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow (1-i)^6 = (\sqrt{2})^6 e^{-\frac{6}{4}\pi i} = 8\,e^{-\frac{3}{2}\pi i}$$

$$\Rightarrow z = \frac{e^{\frac{25}{6}\pi i}}{8\,e^{-\frac{3}{2}\pi i}} = \frac{1}{8}\,e^{\left(\frac{25}{6}+\frac{3}{2}\right)\pi i} = \frac{1}{8}\,e^{i\frac{17}{3}\pi} =$$

$$= \frac{1}{8}\,e^{i4\pi+5\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{8}\,e^{\frac{5}{3}\pi i}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{16}-\frac{\sqrt{3}}{16}i$$