

# ANALISI MATEMATICA 1

Corso di Laurea in Ingegneria Edile e Architettura.

A.A. 2017/2018

Docente: S. Fornaro

## Programma definitivo

### Premessa

Oltre al programma indicato dettagliatamente nel seguito, per il superamento dell'esame è ritenuta irrinunciabile la conoscenza dei necessari **prerequisiti**, richiesti per l'immatricolazione alla Facoltà.

### LIBRI CONSIGLIATI:

- M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, *Analisi Matematica 1*, Zanichelli, Bologna, 2009.
- M. Bramanti, *Esercitazioni di Analisi Matematica 1*, Ed. Esculapio, Bologna, 2011.

Le dimostrazioni con \* sono facoltative per chi sceglie la prova orale *semplificata*. In tal caso il voto finale non potrà superare il punteggio 26/30.

1. **Insiemi numerici.**  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ : proprietà algebriche. Struttura di campo in  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ . Relazione d'ordine " $\leq$ " e ordine totale. Struttura di campo ordinato. Maggioranti e minoranti di un insieme. Insieme limitato. Estremo superiore e inferiore (definizione e caratterizzazione). Massimi e minimi. Irrazionalità di  $\sqrt{2}$  (con dimostrazione\*). Assioma di continuità in  $\mathbb{R}$ . Densità di  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ . Intervalli. Valore assoluto e significato geometrico. Radici n-sime aritmetiche. Potenze a esponente reale e logaritmi. Il campo dei numeri complessi  $\mathbb{C}$ , il sottocampo  $\mathbb{C}_0$ . Forma algebrica. Piano di Gauss. Operazioni con i numeri complessi, coniugio. Modulo di un numero complesso e sue proprietà. Forma trigonometrica. Formule di de Moivre (con dimostrazione di quella per il prodotto) e significato geometrico. Formula per le radici n-sime (con dimostrazione). Teorema fondamentale dell'algebra.
2. **Funzioni reali di variabile reale.** Generalità. Dominio, immagine, grafico. Funzioni limitate, simmetriche (pari o dispari), monotone, periodiche. Funzioni elementari (proprietà e grafico): funzione valore assoluto, funzioni potenza, esponenziale, logaritmica, trigonometriche. Funzioni invertibili e inverse. Operazioni sui grafici. Funzioni trigonometriche inverse. Inverse di  $Sh(x)$  e  $Ch(x)$ .
3. **Successioni.** Definizione di successione. Successione limitata superiormente/inferiormente, limitata. Successioni convergenti. Definizione di limite. Unicità del limite (con dimostrazione). Successioni divergenti, indeterminate o irregolari. Limite per eccesso/per difetto. Successioni monotone e Teorema fondamentale delle successioni monotone (con dimostrazione\*). Limite della successione  $\{n^\alpha\}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Limite della successione geometrica  $\{q^n\}$ . Algebra dei limiti. Forme indeterminate. Teorema di permanenza del segno (I e II forma). Teorema di confronto e conseguenze. Limite notevole  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ . Ordine di infiniti. Confronti e stime asintotiche. Teorema della gerarchia degli infiniti. Successioni asintotiche. Criterio del rapporto.
4. **Limiti di funzioni.** Definizione di limite per successioni. Limiti al finito e all'infinito. Asintoti orizzontali, obliqui e verticali. Limiti sinistro e destro. Non esistenza del limite. Funzione continua in un punto. Discontinuità a salto. Definizione di intorno. Definizione topologica di limite. Unicità del limite. Teorema del confronto. Teorema della permanenza del segno. Algebra dei limiti. Limiti delle funzioni elementari. Algebra delle funzioni continue. Teorema di continuità della funzione composta. Limite notevole  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  con dimostrazione\*. Prolungamento per continuità. Limiti notevoli:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ ,

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1$ , con dimostrazioni. Stime asintotiche. Gerarchia degli infiniti. Teorema degli zeri con dimostrazione\*. Teorema di Weierstrass. Teorema dei valori intermedi. Discontinuità di una funzione monotona. Continuità e invertibilità.

- 5. Derivazione.** Definizione di funzione derivabile in un punto. Derivata prima di una funzione. Significato geometrico della derivata. Retta tangente. Derivate delle funzioni elementari  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $x^\alpha$ ,  $e^x$ ,  $\log x$  (con dimostrazione\*). Algebra delle derivate. Teorema di derivazione della funzione composta (regola della catena). Punti di non derivabilità: punto angoloso, cuspide e punto di flesso a tangente verticale. Legame tra derivabilità e continuità (con dimostrazione). Teorema di derivazione della funzione inversa. Teorema di Fermat (con dimostrazione). Punti stazionari o critici. Teorema di Lagrange e suo significato. Teorema di monotonia (con dimostrazione\*). Limite della derivata e derivabilità. Caratterizzazione delle funzioni a derivata nulla. Il Teorema di De l'Hospital. Derivata seconda. Definizione e caratterizzazione di funzione convessa (concava). Continuità e derivabilità di una funzione convessa. Convessità in termini di derivata prima e derivata seconda. Convessità e rette tangenti. Punto di flesso. Polinomi di Taylor e di MacLaurin. Definizione di "o piccolo". Formule di Taylor e di MacLaurin di ordine  $n$  con resto in forma di Peano e in forma di Lagrange. Sviluppi delle funzioni elementari  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\log(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$ .
- 6. Serie numeriche.** Definizione di serie numerica. Somme parziali di una serie. Termine generale di una serie. Serie convergente, divergente, irregolare. Somma della serie. Serie geometrica (con dimostrazione del suo carattere). Serie telescopica. Condizione necessaria di convergenza (con dimostrazione). Proprietà delle serie a termini positivi (con dimostrazione). Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico. Criterio della radice (con dimostrazione\*). Criterio del rapporto. Definizione di convergenza assoluta. Criterio di convergenza assoluta. Serie a termini di segno alterno. Criterio di Leibniz.
- 7. Calcolo integrale.** Somma di Cauchy-Riemann di una funzione limitata. Funzione integrabile secondo Riemann e integrale di Riemann. Classi di funzioni integrabili. Esempio di funzione non integrabile: la funzione di Dirichlet. Proprietà dell'integrale: linearità, additività rispetto all'intervallo di integrazione, positività, monotonia e disuguaglianza triangolare. Teorema della media integrale. Primitiva. Teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione). Integrale indefinito. Primitive delle funzioni elementari. Integrazione per sostituzione. Integrazione delle funzioni razionali fratte. Integrazione per parti. Integrali delle funzioni simmetriche. Formula per la lunghezza di un grafico (con dimostrazione\*). Lunghezza dell'arco di parabola  $y = x^2$  con  $x \in [0, a]$ . Integrali generalizzati. Esempi  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$  e  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ . Criteri di integrabilità per funzioni positive: criterio del confronto e criterio del confronto asintotico. Funzioni assolutamente integrabili. Criterio integrale (con dimostrazione\*) e Secondo Teorema fondamentale del calcolo integrale (o Teorema di Torricelli).

Pavia, 29 gennaio 2018