

1. [5 pt] (a) Determinare il dominio di $f(x) = \frac{\sqrt{\log(|x|)}}{x}$.

$$\text{dom } f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty [$$

- (b) Studiare i limiti di f agli estremi del dominio e stabilire se esistono asintoti verticali/orizzontali/obliqui.

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$$

$y=0$ A. ORIZZ.

2. [6 pt] Calcolare la derivata prima di $h(x) = |x^2 - 3x - 4|$, specificando il dominio di h' .

$$h'(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{|x^2 - 3x - 4|} \cdot (2x - 3) = \begin{cases} 2x - 3 & x^2 - 3x - 4 > 0 \\ 3 - 2x & x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases}$$

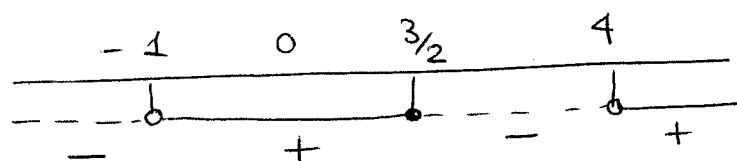
$\text{dom } h' = \mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$

Studiare i punti di non derivabilità di h .

$$\begin{array}{ll} x = -1 & \text{punto angoloso} \\ x = 4 & \text{"} \end{array} \quad \begin{array}{l} f'_+(-1) = 5 ; \quad f'_-(-1) = -5 \\ f'_+(4) = 5 ; \quad f'_-(4) = -5 \end{array}$$

Determinare gli intervalli in cui h è crescente e quelli in cui h è decrescente.

Segno di h' :



$$h \text{ crescente in } (-1, 3/2] \cup (4, +\infty)$$

$$h \text{ decrescente in } (-\infty, -1) \cup (3/2, 4)$$

3. [6 pt] Calcolare i seguenti limiti, motivando la risposta.

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 - 1}{2n + 1} \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{e^x - e^3}$$

$$(a) \frac{n^4 - 1}{2n + 1} \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{n^4 - 1}{(2n + 1)n^3} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$(b) \text{ De L'Hopital : } \frac{2x - 5}{e^x} \rightarrow \frac{1}{e^3}$$

4. [4 pt] Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^n}$, motivando la risposta.

$$\text{Conv. ass: } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$$

questa serie conv.
con il CR. del Rapporto

Dunque la serie conv. anche semplice.

5. [5 pt] Stabilire se l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+2)} dx$ è convergente.

$$\text{Per } x \rightarrow 0^+ \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+2)} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Per } x \rightarrow +\infty \quad f(x) \sim \frac{1}{x^{3/2}}$$

Dunque f è integrabile sia in 0 sia all'infinito.

L'integrale converge

In caso affermativo, calcolarlo (usando la sostituzione $t = \sqrt{x}$).

$$t = \sqrt{x} \rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \rightarrow dx = 2t dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+2)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{2+t^2} = \sqrt{2} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

6. [4 pt] Risolvere in \mathbb{C} l'equazione $z^3 = -4 + 4i$ e rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss.

$$-4 + 4i = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)$$

$$z_1 = \sqrt[3]{4\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{4\sqrt{2}} \left(\cos \frac{11}{12}\pi + i \sin \frac{11}{12}\pi \right)$$

$$z_3 = \sqrt[3]{4\sqrt{2}} \left(\cos \frac{19}{12}\pi + i \sin \frac{19}{12}\pi \right)$$

