

1. [6 pt] Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x^2} & x > 0 \\ a & x = 0 \\ \frac{1}{2}x + b & x < 0 \end{cases}$$

Stabilire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ f risulta continua.

Dire se per i valori di a, b trovati, f è anche derivabile.

2. [6 pt] Calcolare i seguenti limiti

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{8} \sqrt{n} \log^2 n + \sin\left(\frac{1}{n}\right) + n^n}{e^n(n^{-5} + 1) + \cos\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x \arctan x}}$$

3. [6 pt] Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{|t|^{3/2}}{t^2 + 1} dt.$$

Stabilire il dominio di F e dire se F ammette asintoti verticali.

Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

4. [4 pt] Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{n+1}$.

5. [4 pt] Calcolare l'integrale $\int \frac{dx}{x(\log^2 x - 2 \log x)}$ (può essere utile il cambio di variabili $t = \log x$).

6. [4 pt] Risolvere in \mathbb{C} l'equazione $z^2 = \frac{5}{1-3i} - \frac{1+(6+\sqrt{3})i}{4}$ e rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss.

