

1. [6 pt] Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} & 0 < x < 1 \\ 2 & x = 0 \\ |x|^\alpha + c & x < 0 \end{cases}$$

Stabilire per quali $c, \alpha \in \mathbb{R}$ f risulta continua in $x = 0$.

Dire se f è anche derivabile in $x = 0$ nei casi $c = 1, \alpha = 0$ e $c = 2, \alpha = 1$.

2. [6 pt] Calcolare i seguenti limiti

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + \sin(2n)} - n$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{(\cotg x)^2}$

3. [6 pt] Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_1^x \frac{|t|^{5/2}}{t^2 + t + 1} dt.$$

Stabilire il dominio di F e dire se F ammette asintoti verticali.

Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

4. [4 pt] Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{n^2+2n}$.

5. [4 pt] Calcolare l'integrale $\int_{e^2}^{e^4} \frac{dx}{x(4 + \log^2 x)}$ (può essere utile il cambio di variabili $t = \log x$).

6. [4 pt] Risolvere in \mathbb{C} l'equazione $z^3 = \frac{(2+i)(5-\frac{1}{2}i)}{1+\frac{1}{2}i} - 10$ e rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss.

