ANALISI MATEMATICA 1 Corso di Laurea in Ing. Edile e Architettura 01/02/2016 (A)	COGNOME e Nome	firma

1. **[9 pt]** Sia $f(x) = \sqrt[3]{x-1}\, e^{-x}$. Determinare: $dom f =$ $\mathbb{R}$

limiti agli estremi del dominio e eventuali asintoti:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asint. orizz. dx ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{3(x-1)^{2/3}} e^{-x} - \sqrt[3]{x-1}\, e^{-x} = e^{-x}\, \frac{1-3x+3}{3(x-1)^{2/3}} = e^{-x} \cdot \frac{4-3x}{3(x-1)^{2/3}}$

intervalli di monotonia

$f' \geq 0 \iff x \leq \frac{4}{3}$ f crescente in $(-\infty, 4/3]$
f decrescente in $[4/3, +\infty)$

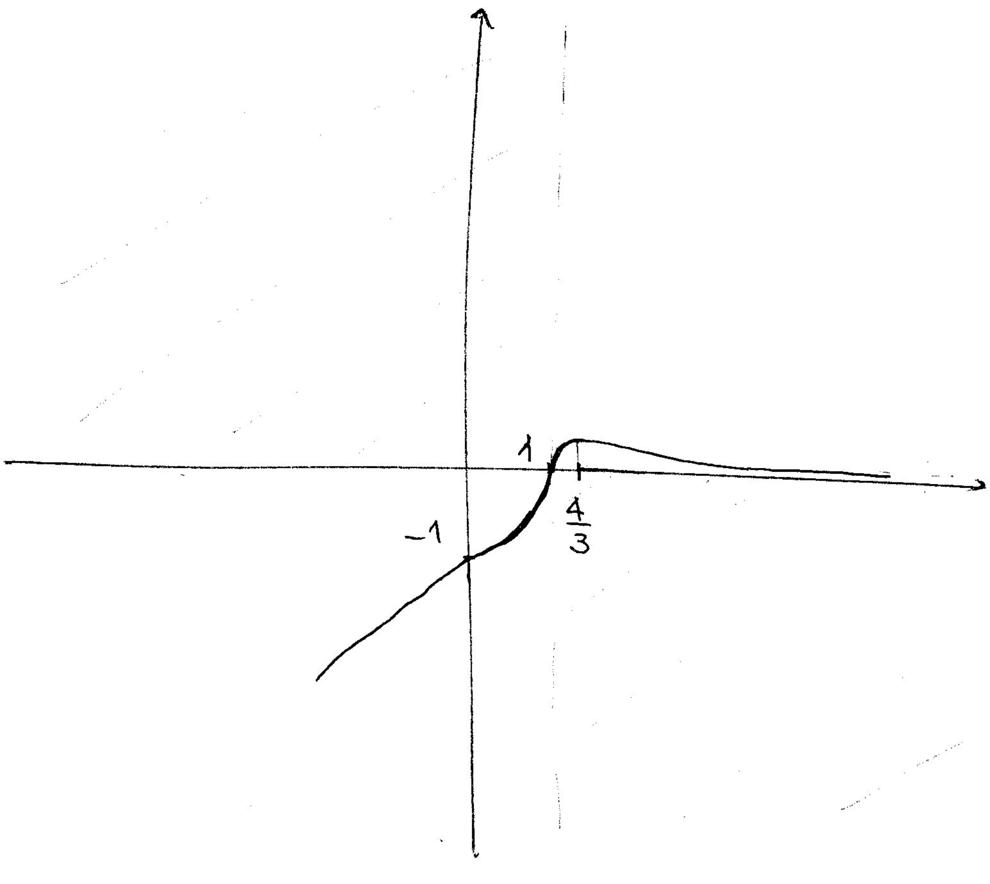
punti di non derivabilità e loro natura:

$x = 1$ pto di flesso a tangente verticale : $f'(1) = +\infty$

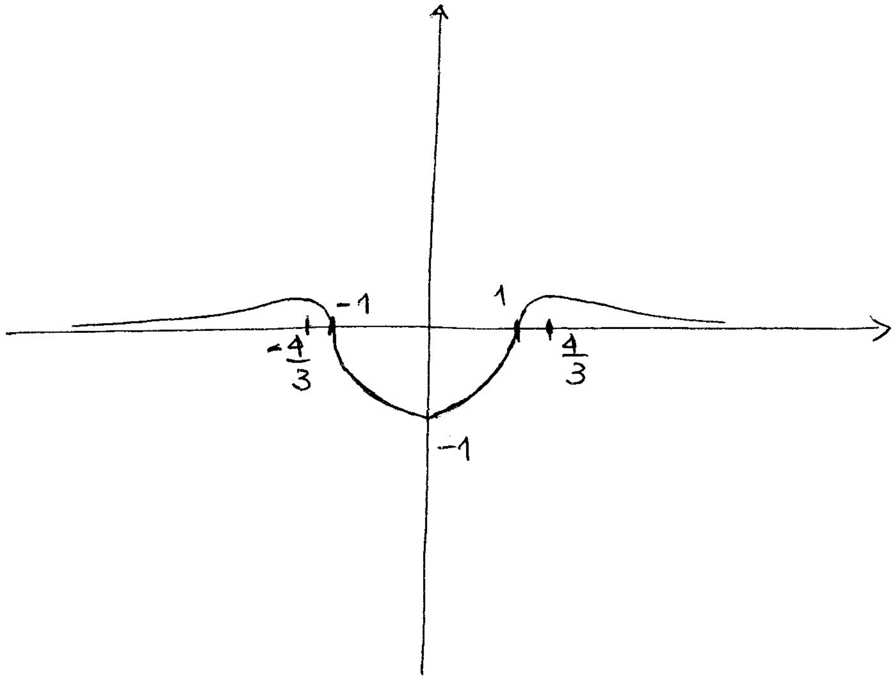
estremi locali o globali

$x = \frac{4}{3}$ pto di massimo globale ; $f\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}\, e^{-\frac{4}{3}}$ massimo globale

grafico qualitativo di f



Dedurre il grafico qualitativo di $g(x) = f(|x|)$.



2. [5 pt] Sia $h(x) = \dfrac{x \log x}{2x+1}$. Studiare il $\lim_{x\to 0^+} h(x)$ e dedurre che $h$può essere prolungata con continuità in $x = 0$.
Il prolungamento ottenuto è derivabile da destra in $x = 0$? Motivare la risposta.

$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} x \log x = 0$ per la gerarchia degli infiniti;

$\Rightarrow h(0) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log x}{2x+1} = -\infty$ $\quad$ h non è derivabile da dx in $x=0$

3. [4 pt] Studiare $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{(\sin\sqrt{x} - \sqrt{x})^2}{\sqrt[4]{1-3x^3} - 1}$.

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ per $t \to 0$ $\quad \Rightarrow \operatorname{sen}\sqrt{x} = \sqrt{x} - \frac{1}{6} x^{3/2} + o(x^{3/2})$ per $x \to 0^+$

$(1-3x^3)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}(-3x^3) + o(x^3)$ per $x \to 0$

$(1-3x^3)^{1/4} - 1 = -\frac{3}{4} x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$

Il limite dato è uguale a $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{36} x^3}{-\frac{3}{4} x^3} = -\dfrac{1}{27}$

4. [4 pt] Stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n^2 + k\sqrt{n}}{\sqrt[3]{100+\sqrt{n^9+6}}}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Se $k=0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n^2}{\sqrt[3]{100+\sqrt{n^9+6}}}$ converge assolutam.

in quanto $\left|\frac{\cos n^2}{\sqrt[3]{100+\sqrt{n^9+6}}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{100+\sqrt{n^9+6}}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$

e quindi per $k=0$ c'è anche conv. semplice.

Se $k \neq 0$ allora $\frac{\cos n^2 + k\sqrt{n}}{\sqrt[3]{100+\sqrt{n^9+6}}} \sim \frac{k\sqrt{n}}{n^{3/2}} = \frac{k}{n}$ non converge

5. [4 pt] Calcolare l'integrale $\int_0^1 x \arctan \frac{1}{x}\, dx$, dopo averne giustificato l'esistenza.

La funzione $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ si estende con continuità in $x=0$ in quanto $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Quindi f è integrabile in $[0,1]$.

Integrando per parti:

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

6. [4 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^6 - z^3 + 1 = 0$ e rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss.

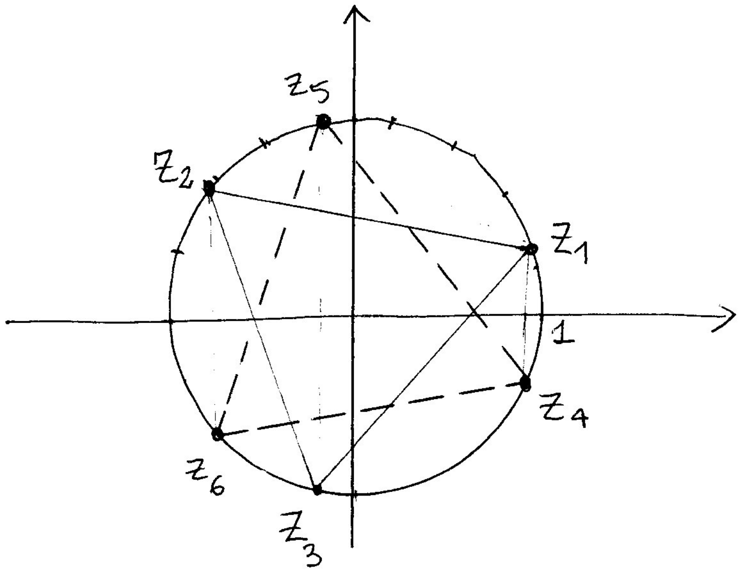
$z^3 = w$: $w^2 - w + 1 = 0$ $\quad w_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$z^3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

$z_1 = \left(\cos\frac{\pi}{9} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{9}\right)$; $z_2 = \cos\frac{7}{9}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{7}{9}\pi$; $z_3 = \cos\frac{13}{9}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{13}{9}\pi$

$z^3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}$

$z_4 = \cos\frac{\pi}{9} - i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{9}$; $z_5 = \cos\frac{5}{9}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{5}{9}\pi$; $z_6 = \cos\frac{11}{9}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{11}{9}\pi$



OSS:

$\{z_1, z_2, z_3\}$ sono i vertici di un triangolo equilatero in quanto radici terze di $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\{z_4, z_5, z_6\}$ sono i vertici di un triangolo equilatero in quanto radici terze di $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

OSS:

$z_4 = \overline{z}_1$

$z_5 = \overline{z}_2$

$z_6 = \overline{z}_3$

perché radici di un polinomio a coeff. reali.