[

ANALISI MATEMATICA 1 Corso di Laurea in Ing. Edile e Architettura 16/02/2016 (A)	COGNOME e Nome firma

1. **[9 pt]** Sia $f(x) = x^2 + \log|x-2|$. Determinare: $dom f =$ $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

limiti agli estremi del dominio e eventuali asintoti:

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$; $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$

$x = 2$ As. Verticale

$f'(x) =$ $2x + \frac{1}{x-2}$ $\forall x \neq 2$

intervalli di monotonia

f crescente in $\left[1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left]2, +\infty\right[$

f decrescente in $\left]-\infty, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[1+\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right[$

punti di non derivabilità e loro natura;

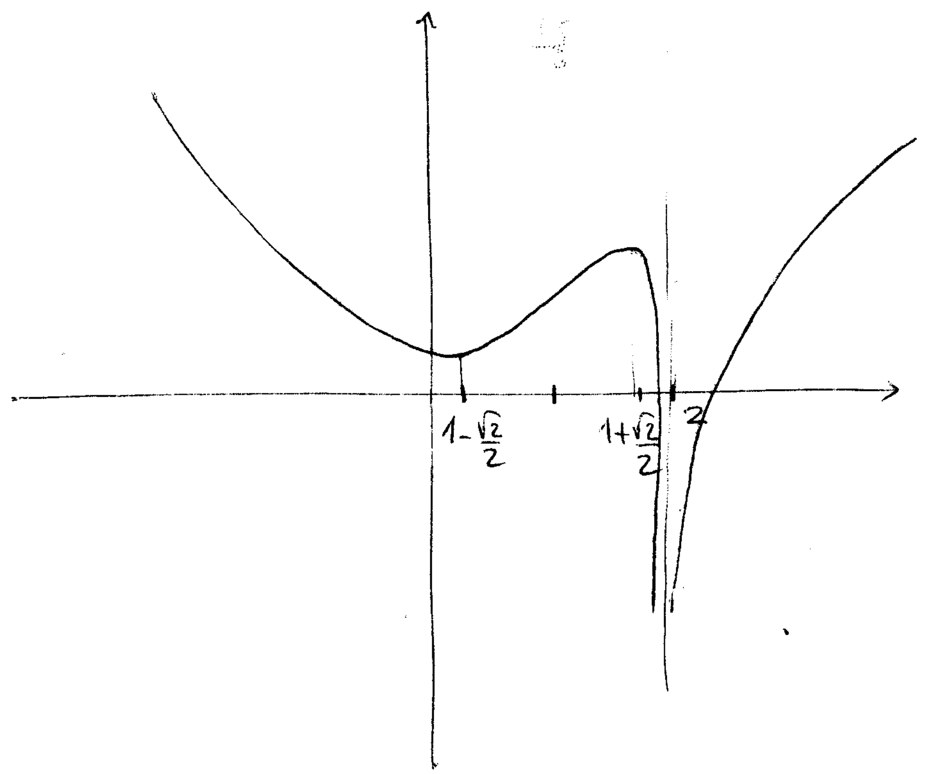
non esistono

estremi locali o globali

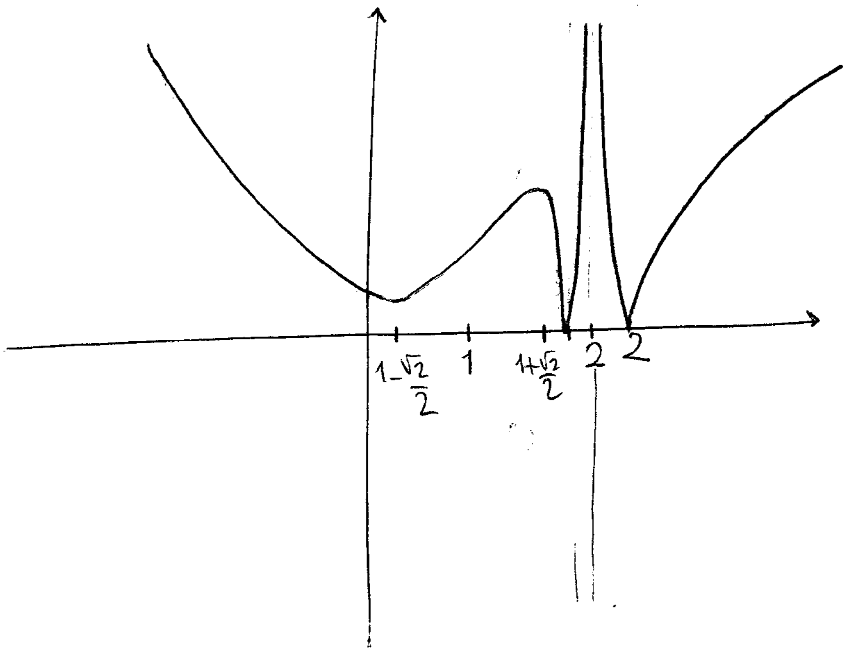
$x = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ pto di min loc. ; $f\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) > 0$

$x = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ pto di max loc.

grafico qualitativo di f



Dedurre il grafico qualitativo di $g(x) = |f(x)|$.



2. [5 pt] Sia $h(x) = \dfrac{1-\cos x}{3x}$. Dopo aver prolungato h con continuità in $x = 0$, dire se il prolungamento ottenuto è derivabile in $x = 0$. Tale prolungamento è di classe C^1? Motivare le risposte.

$$\frac{1-\cos x}{3x} = \frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{3} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}\cdot 0 = 0 \Rightarrow h(0) = 0$$

$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{1-\cos x}{3x^2} \longrightarrow \frac{1}{6} \Rightarrow \exists\, h'(0) = \frac{1}{6}$$

$$h'(x) = \frac{\sin x\,(3x) - 3(1-\cos x)}{9x^2} = \frac{\sin x}{3x} - \frac{1-\cos x}{3x^2} \quad x \neq 0$$

h' è continua in ogni $x \neq 0$

$$h'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} = h'(0) \Rightarrow h' \text{ è continua in } x = 0$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di h nel punto di ascissa π.

$$y = h(\pi) + h'(\pi)(x-\pi) \Rightarrow y = \frac{2}{3\pi} - \frac{2}{3\pi^2}(x-\pi) \Rightarrow$$

$$y = -\frac{2}{3\pi^2}x + \frac{4}{3\pi}$$

3. [4 pt] Studiare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x} - \cos(\sqrt{2x})}{x \arctan x}$.

Sv. di MacLaurin: $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$\cos\sqrt{2x} = 1 - \frac{1}{2}\cdot 2x + \frac{1}{24}4x^2 + o(x^2)$

$$\text{Num} = \cancel{1} \cancel{-x} + \frac{1}{2}x^2 \cancel{-1} \cancel{+x} - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2) \sim \frac{1}{3}x^2$$

Den $\sim x^2$ in quanto $\operatorname{arctg} x \sim x$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x} - \cos\sqrt{2x}}{x \operatorname{arctg} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{3}x^2}{x^2} = \frac{1}{3}.$$

4. **[4 pt]** Stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)^{n \log n}$, motivando la risposta.

CR. radice: $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)^{n\log n}} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{n}\right)^{\log n}} = \frac{1}{e^{\log n \log \sqrt[4]{n}}}$

$= \frac{1}{e^{\frac{1}{4}(\log n)^2}} \longrightarrow 0 < 1 \Rightarrow$ la serie converge

5. **[4 pt]** Stabilire se l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$ converge e, in caso affermativo, calcolarlo.

$x^2+x+1 \neq 0$ in $[0,+\infty)$

$\frac{1}{x^2+x+1} \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty \Rightarrow$ l'integr. converge per confr. asint.

$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left\{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1\right\}$

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)\right]^2+1}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\right]_0^{+\infty}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}$

6. **[4 pt]** Risolvere in C l'equazione $\sqrt{2}|z|z^2 = \sqrt{3} + 3i$ e rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss.

$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

$\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

L'eq. diventa $\sqrt{2}\,\rho^3(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} \rho^3 = \sqrt{6} \\ 2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \rho = \sqrt[6]{6} \\ \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$ $\quad \theta_0 = \frac{\pi}{6},\ \theta_1 = \frac{7}{6}\pi$