Programma DEFINITIVO
“Complementi di Analisi Matematica”
a.a. 2017/2018.

Testi consigliati

- M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, Analisi Matematica 2, ZANICHELLI (*per i Cap. 1 e 3 e parte del Cap. 2*).
- S. Salsa, A. Squellati, Modelli dinamici e controllo ottimo, EGEA (*per il Cap. 4*).
- P. Marcellini, C. Sbordone, Esercitazioni di Matematica, 2 volume, parte prima e parte seconda, LIGUORI EDITORE.

Le dimostrazioni con $*$ sono facoltative per chi sceglie la prova *semplificata*. In tal caso il voto finale non potrà superare il punteggio 26/30 .

1. Funzioni di più variabili - Richiami di topologia in $\mathbb{R}^N$. Punto interno/esterno/di frontiera. Insieme aperto, chiuso, compatto. Limiti e continuità. Teorema di Weierstrass. Definizione di derivata parziale e suo significato geometrico. Gradiente. Definizione di funzione differenziabile. Definizione di differenziale primo. C.N. per la differenziabilità. Definizione di derivata direzionale e suo significato geometrico. Formula del gradiente. Iperpiano tangente. C.S. per la differenziabilità. Derivate di ordine superiore al primo. Definizione di differenziale secondo. Teorema di Schwarz. Matrice hessiana. Teorema di Lagrange. Formula di Taylor del secondo ordine con resto in forma di Peano e formula di Taylor del primo ordine con resto in forma di Lagrange. Teorema di derivazione delle funzioni composte. Definizione di punto di minimo/massimo, relativo/assoluto. Teorema di Fermat (con dimostrazione). Definizione di punto critico o stazionario. Definizione di punto di sella. Classificazione dei punti critici tramite la matrice hessiana. Segno di una forma quadratica. Criterio dei minori incapsulati. Criterio degli autovalori. Insiemi e funzioni convesse. Regolarità delle funzioni convesse. Caratterizzazione della convessità tramite le derivate del primo ordine. Caratterizzazione della convessità tramite le derivate del secondo ordine. Ottimizzazione di funzioni convesse. Teorema delle funzioni implicite di Dini per $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $f : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Ortogonalità del gradiente alle curve di livello (con dimostrazione). Funzioni vettoriali di più variabili reali. Matrice iacobiana e formula di linearizzazione. Teorema di Dini per $\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$. Estremi vincolati: metodo parametrico; metodo dei moltiplicatori di Lagrange con dimostrazione* nel caso di funzione $f(x, y)$ con un vincolo di equazione $g(x, y) = 0$.

2. Equazioni e sistemi differenziali ordinari - Equazioni differenziali. Ordine di un'equazione differenziale. Definizione di soluzione e di integrale generale. Problema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale. Teorema di Peano di esistenza locale. Definizione di funzione $f(t, y)$ localmente lipschitziana rispetto a y uniformemente in t. Condizioni sufficienti per la locale lipschitzianità. Teorema di esistenza locale e unicità. Comportamento della soluzione massimale. Teorema di esistenza globale. Teorema di regolarità. Dipendenza continua dai dati. Integrale generale per l'equazione lineare $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$. Problema di Cauchy per un'equazione a variabili separabili $y' = a(t)b(y)$. Integrale generale per l'equazione di Bernoulli $y'(t) = P(t)y(t) + Q(t)y^\alpha(t)$. Integrale generale per l'equazione omogenea $y' = f(y/t)$. Sistemi differenziali del primo ordine ed equazioni differenziali di ordine n: esistenza locale, unicità, esistenza globale, dipendenza continua dai dati. Sistemi lineari del primo ordine e equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti continui: struttura dell'integrale generale (con dimostrazione nel caso dei sistemi); struttura dell'integrale generale del sistema completo (con dimostrazione* nel caso dei sistemi). Principio di sovrapposizione. Matrice wronskiana e (determinante) wronskiano. Teorema di Liouville. Metodo di variazione delle costanti arbitrarie (con dimostrazione nel caso dei sistemi). Coefficienti costanti: determinazione dell'integrale generale. Metodo di somiglianza. Metodo di riduzione per determinare una base di soluzioni per un'equazione del secondo ordine omogenea a coefficienti variabili, con una soluzione nota. Equazioni di Eulero. Il problema ai limiti completo ed omogeneo.

3. Serie di Fourier - Serie di funzioni. Convergenza puntuale e totale. Continuità della funzione somma. Derivazione e integrazione termine a termine di una serie di funzioni. Richiami sugli spazi vettoriali dotati di prodotto scalare. Teorema della proiezione. Calcolo dei coefficienti di Fourier di una funzione f periodica di periodo 2π. Serie di Fourier in forma trigonometrica. Convergenza in media quadratica. Disuguaglianza di Bessel. Lemma di Riemann-Lebesgue. Uguaglianza di Parseval. Calcolo dei coefficienti di Fourier per f pari e f dispari. Il caso di f periodica di periodo $T \neq 2\pi$. Convergenza puntuale della serie di Fourier. Legame fra regolarità della funzione ed decadimento dei coefficienti di Fourier. Derivazione termine a termine di una serie di Fourier. Serie di Fourier in forma esponenziale. Metodo di separazione delle variabili per alcune equazioni alle derivate parziali.

4. Elementi di Calcolo delle Variazioni - Definizione di funzionale e classe delle funzioni ammissibili. Estremanti di un funzionale. Problemi classici del calcolo delle variazioni: problema di Didone, problema della brachistocrona, problema della curva di lunghezza minima. Variazione prima e condizione necessaria di estremalità (con dimostrazione*) nel problema con estremi fissi. Equazione di Eulero-Lagrange. Estremali. Problema con estremi liberi: condizioni di trasversalità. Condizione sufficiente di ottimalità (con dimostrazione*). Problemi isoperimetrici (estremi vincolati) e relativa condizione necessaria (moltiplicatore di Lagrange).

Pavia, 22 gennaio 2018