Funzioni implicite

1. Provare che l'equazione $e^{xy} - \sin(xy) - y = 0$ definisce un'unica funzione implicita $g(x)$ in un intorno del punto $(0, 1)$. Scrivere la formula di MacLaurin del terzo ordine per g con resto in forma di Peano.

2. Provare che l'equazione $\cosh(xz) + \cos(xy) - yz = 0$ definisce un'unica funzione implicita $g(x, y)$ in un intorno del punto $(0, 1, 2)$. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di g nel punto $(0, 1, 2)$.

3. Provare che l'equazione $xy - ye^{x-2} + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ definisce un'unica funzione implicita $g(x)$ in un intorno del punto $(2, 0)$. Scrivere la formula di Taylor con centro $x_0 = 2$ del secondo ordine per g con resto in forma di Peano.

4. Provare che l'equazione $x^2 + 2x + e^y + y - 2z^3 = 0$ definisce un'unica funzione implicita $y = \varphi(x, z)$ in un intorno del punto $(-1, 0)$. Calcolare $\nabla\varphi(-1, 0)$.

5. Provare che l'equazione $x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos y = 0$ definisce un'unica funzione implicita $g(x, y)$ in un intorno del punto $(0, 0, -1)$. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di g in tale punto.

6. Provare che l'equazione $xe^y + ye^x = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $g(x)$ in un intorno del punto $x_0 = 0$. Scrivere la formula di MacLaurin del secondo ordine per g con resto in forma di Peano.

7. Provare che l'equazione $e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x+1) + 1 = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $g(x)$ in un intorno del punto $x_0 = 0$ con $g(0) = -1$. Provare che $x = 0$ è un punto di minimo per g.

8. Provare che l'equazione $\arctan(z) + xy^2 + xz - y^3 - 1 = 0$ definisce un'unica funzione implicita $g(x, y)$ in un intorno del punto $(0, -1, 0)$. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di g in tale punto.

9. Provare che l'equazione $y\cos(x) + 2(x-1)\cos(\frac{\pi}{3}y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $h(y)$ in un intorno del punto $y_0 = 1$. Calcolare $h'(1)$.

10. L'equazione $x^2 + y^3 z = \frac{xz}{y}$ ammette la soluzione $(2, 1, 4)$. Provare che esiste un'unica funzione implicita $h(x, z)$ in un intorno del punto $(2, 4)$ definita da tale equazione. Calcolare $\nabla h(2, 4)$.

11. Dato il sistema
$$\begin{cases} x + \log(y) + 5z - 10 = 0 \\ 2x + y^2 + 3z^3 - 25 = 0 \end{cases}$$
dire quale/quali coppie di variabili si possono esplicitare in funzione della terza in un intorno di $P_0(0, 1, 2)$. In ogni caso calcolare il vettore derivato in P_0.

12. Verificare che il sistema
$$\begin{cases} 3x - \cos(y) + y + e^z = 0 \\ x - e^x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$
definisce in un intorno dell'origine una curva $\vec{\gamma}(t) = (t, \varphi_1(t), \varphi_2(t))$. Scrivere l'equazione della retta tangente a $\vec{\gamma}$ in O.

13. Verificare che il sistema

$$\begin{cases} xy + 3x^2 + e^{z+x^2} = 1 \\ \sin(xyz) + \sin\big((y+1)x\big) + \sin z = 0 \end{cases}$$

definisce un'unica coppia di funzioni $(x(y), z(y))$ in un intorno di O. Scrivere l'equazione del piano normale alla curva $(x(y), y, z(y))$ passante per l'origine.

14. Verificare che il sistema

$$\begin{cases} \sin(xy) + \log(1 + y^2 z^2) = \log 2 \\ \cos(xy) + yz = 0 \end{cases}$$

definisce un'unica coppia di funzioni $(y(x), z(x))$ in un intorno di $P(\pi, 1, 1)$. Calcolare $\lim_{x\to\pi} \dfrac{y(x) - 1}{z(x) - 1}$.

15. Verificare che il sistema

$$\begin{cases} x^3 + yz + xy = 3 \\ (y-1)\log(1+x^2) + (x-1)e^z = 0 \end{cases}$$

definisce un'unica coppia di funzioni $(y(x), z(x))$ in un intorno di $P(1, 1, 1)$. Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva $\vec{r}(x) = (x, y(x), z(x))$ in P.

16. Provare che l'equazione $\log(1+xy) + 2xy^2 = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $x(y)$ in un intorno del punto $y_0 = 1$. Calcolare $\lim_{y\to 1} \dfrac{x(y)}{3\sin^2(y-1)}$.

17. Provare che il luogo dei punti del piano per i quali risulta $y \log x - x \cos y = 0$ definisce una curva regolare in un intorno del punto $(1, \pi/2)$. Scritta tale curva come grafico di una funzione di una variabile, determinare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine.

18. Verificare che l'equazione

$$x \sin x + \log(1+y^2) - z - \int_0^z e^{t^2}\, dt = 0$$

definisce in un intorno di $(0, 0, 0)$ un'unica funzione $z = z(x, y)$ e che per tale funzione l'origine è un punto di minimo locale.

19. Provare che l'equazione $x^2 + xu^2 + y^2 + e^{xu} - z + y^2 e^z = 0$ definisce un'unica funzione $z = z(x, y, u)$ tale che $z(0, 0, 0) = 1$ e che per tale funzione l'origine è un punto critico. Determinare la natura di tale punto.