CORSO di LAUREA IN INGEGNERIA BIOMEDICA, ELETTRICA, ELETTRONICA ed INFORMATICA

ESERCIZI DI METODI MATEMATICI - FOGLIO 6

1) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, periodica di periodo $T = 2\pi$, dispari, definita da

$$f(t) = \begin{cases} t & t \in [0, \frac{\pi}{4}[\\ (\frac{\pi}{2} - t) & t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\\ 0 & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

a) Scrivere la serie di Fourier della funzione;

b) studiare la convergenza della serie alla funzione.

Soluzione. Si trova

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin(n\frac{\pi}{4}) - 2\sin(n\frac{\pi}{2})}{\pi n^2} \sin nt.$$

La serie converge uniformemente e puntualmente alla funzione in tutto $\mathbf{R}$, poichè la funzione è continua e in ogni periodo è derivabile escluso un numero finito di punti, dove la derivata ha comunque un salto finito.

2) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dispari, periodica di periodo $T = 2\pi$ t.c.

$$f(t) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} t^2 & t \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ \frac{4}{\pi}(t-\pi)^2 & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi[. \end{cases}$$

Scrivere lo sviluppo di Fourier di f, precisando in quali punti converge al corrispondente valore della funzione. Valutando poi la funzione in $t = \frac{\pi}{2}$, dedurre la somma di una opportuna serie numerica, giustificando i passaggi.

Soluzione. Si tratta di una funzione di classe C^1 a tratti, come si verifica facilmente disegnando il grafico; possiamo dunque prevedere che la serie converge alla funzione in tutto $\mathbf{R}$. Poichè f è dispari, avremo uno sviluppo in serie di soli seni. Risulta

$$b_n = \frac{16}{\pi n^2} \sin(n\frac{\pi}{2}) + \frac{16}{\pi^2 n^3}((-)^n - 1).$$

Infine, sfruttando la convergenza puntuale in $\frac{\pi}{2}$, abbiamo

$$\frac{\pi^2}{16} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \left[1 - \frac{2(-)^k}{2k+1}\right].$$

3) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$definita da

$$f(t) = \frac{\sin t}{2+\cos t}.$$

a) Studiare la convergenza puntuale della serie di Fourier associata alla funzione.

b) Calcolare i coefficienti a_n e b_n dello sviluppo in serie.

Soluzione. La funzione è addirittura di classe C^∞, dunque lo sviluppo di Fourier converge in tutto $\mathbf{R}$ e

$$\forall\, p > 0 \quad \lim_{n\to+\infty} n^p\, a_n = \lim_{n\to+\infty} n^p\, b_n = 0.$$

Inoltre f è dispari, per cui lo sviluppo è di soli seni. Abbiamo allora

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{2+\cos t} \sin\, nt\, dt = \frac{1}{\pi}\frac{1}{i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{2+\cos t} i \sin\, nt\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{2+\cos t}(\cos\, nt + i \sin\, nt)\, dt = \frac{1}{\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{2+\cos t} e^{int}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{z^2-1}{z^2+4z+1} z^{n-1}\, dz = -2Res(f; -2+\sqrt{3}) =$$

$$= (4-2\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})^{n-1} = 2(-)^{n-1}(2-\sqrt{3})^n.$$

4) Data la funzione dispari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[5]{t^4}}{\sin t} & 0 < t \le \dfrac{\pi}{2} \\ a & \dfrac{\pi}{2} < t < \pi \quad a > 0, \end{cases}$$

disegnarne il grafico in $]0, 2\pi[$, verificare che è possibile svilupparla in serie di Fourier in forma esponenziale, scrivere l'espressione dei coefficienti c_n e calcolare esplicitamente c_0, c_1, c_{-1}. Discutere, poi, la convergenza puntuale della serie.