# Esercizi sul Teorema di Dini

1. Data la linea $\Gamma$ definita dall'equazione
$$x^3 + y^2(x+1) = 0,$$
verificare che non è possibile applicare il Teorema di Dini in $O(0,0)$.

2. Si consideri l'equazione
$$y^4 - 2y^2 + e^x + 2x - 1 = 0.$$
Dopo aver verificato che è univocamente risolubile rispetto a $x$ in un intorno del punto $O(0,0)$, disegnare un grafico qualitativo della linea così definita nell'intorno di tale punto.

3. Verificare che l'equazione
$$x^2 + y^2 - ze^z = 0,$$
è univocamente risolubile rispetto a $z$ in un intorno di $O(0,0,0)$. Posto, poi, $z = g(x,y)$, mostrare che in effetti $g \in C^\infty(I_{(0,0)})$ e che il piano tangente alla superficie grafico di $g$ è orizzontale.

4. Si consideri l'equazione
$$y^2 + \lambda x^2 - x^3 = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$
Discutere, al variare di $\lambda$, l'univca risolubilità rispetto ad una delle due variabili, in un intorno di $O(0,0)$. Disegnare, poi, in un intorno di $O(0,0)$ un grafico qualitativo della linea $\Gamma$ definita dall'equazione.

5. Dato
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq \frac{\pi}{2}, \ \ |y| \leq \frac{\pi}{2}\},$$
si consideri la linea $\Gamma$ definita dall'equazione
$$\sin^2 x + y \sin y - 1 = 0,$$
dove $(x,y) \in \Omega$. Verificare che esistono due punti $(0,y_1)$ e $(0,y_2)$ che appartengono a $\Gamma$. Controllare, poi, che l'equazione è univocamente risolubile rispetto a $y$ in opportuni intorni di entrambi i punti.

6. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si consideri la inea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, definita dal sistema
$$\begin{cases} e^x + \cos(\lambda y) + \lambda^2 z - 2 = 0 \\ \ln(1 + \lambda^2 x^2) + y + 15z = 0. \end{cases}$$
Verificare che per $\lambda = \pm 1$ la linea $\Gamma$ ha come tangente in $O(0,0,0)$ la retta definita dal sistema
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + 15z = 0. \end{cases}$$