

Esercizi su continuità e differenziabilità

13 ottobre 2017

1. Determinare

- derivate prime e differenziale primo
- equazione del piano tangente
- derivate seconde e differenziale secondo

della funzione $f(x, y) = 3x^3e^{-xy}$ nel punto $(1, 1)$.

2. Provare che la funzione $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)}$ non è differenziabile in $(0, 1)$. Calcolare le derivate direzionali di f in $(0, 1)$.
3. Stabilire in quale insieme la funzione $f(x, y) = |x| \log(1+y)$ è differenziabile.
4. Studiare continuità, derivabilità, differenziabilità di

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|y|^\alpha \cos x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

in $(0, 0)$ al variare di $\alpha > 0$.

5. Studiare la continuità di

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{x}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

6. Stabilire se le seguenti funzioni sono prolungabili con continuità in $(0, 0)$

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + 2y^2}, \quad f(x, y) = \frac{x\sqrt{|x^2 - y^2|}}{x^2 + y^2}.$$

7. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Stabilire

- dove f è derivabile e calcolare le derivate prime
- dove f è differenziabile
- il più grande aperto in cui f è di classe C^1

8. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Calcolare le derivate direzionali di f in $(0, 0)$.
- Dire se vale la formula del gradiente in $(0, 0)$.
- f è differenziabile in $(0, 0)$?

9. Stabilire se

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{\log(x^2 + y^2)} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è continua, derivabile, differenziabile in $(0, 0)$.

10. Stabilire se

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è continua, derivabile, differenziabile in $(0, 0)$.

11. Stabilire che

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è continua ma non differenziabile in $(0, 0)$.

12. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y - 3y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Calcolare $\nabla f(x, y)$ per $(x, y) \neq (0, 0)$.
- Calcolare $\nabla f(0, 0)$ e stabilire se f è differenziabile in $(0, 0)$.
- Determinare il più grande aperto in cui f è di classe C^1 .

13. Stabilire che

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - 2x^3 - 2xy^2}{x^2 + y^2 + x^2y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è differenziabile in $(0, 0)$.

14. Stabilire se le seguenti funzioni sono differenziabili in $(0, 0)$ dopo averle ridefinite in $(0, 0)$ per renderle continue

$$f_1(x, y) = \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad f_2(x, y) = \frac{x^{\frac{7}{3}}|y|^{\frac{3}{4}}}{x^2 + y^2} \quad f_3(x, y) = \frac{(x^3 + y^3)^2}{x^2 + y^4}.$$

15. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Stabilire se f è continua in $(0, 0)$.
- Calcolare le derivate direzionali di f in $(0, 0)$.
- Stabilire se f è differenziabile in $(0, 0)$.

16. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Stabilire se f è continua in $(0, 0)$.
- Calcolare le derivate direzionali di f in $(0, 0)$.
- Stabilire se f è differenziabile in $(0, 0)$.

17. Stabilire che $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ è continua ma non differenziabile in $(0, 0)$.