

1) Definito il funzionale

$$\Phi(y) = \int_0^\pi [4y(x)^2 + 16y(x) - y'(x)^2] dx,$$

determinare le sue linee estremali $y \in C^2([0, \pi])$, soddisfacenti $y(0) = 2$ e $y(\pi) = 3$.

2) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 2π -periodica, **pari**, definita da

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - t & \text{se } 0 < t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{se } \frac{\pi}{2} < t \leq \pi. \end{cases}$$

- Disegnare il grafico della f .
- Verificare che la f è sviluppabile in serie di Fourier.
- Scrivere esplicitamente tale sviluppo.
- Discutere la convergenza della serie alla funzione.
- Utilizzando i risultati del punto precedente, determinare la somma della serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

3) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) = xe^{y^2 - x}.$$

Determinare tutti i punti critici della f e classificarli. Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione f nel compatto

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

4) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^7 + 4y^3}{4x^2 + 3y^2} - 4y & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Verificare che la funzione f non è differenziabile nel punto $(0, 0)$.