APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DELL' 11 FEBBRAIO 2014

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Determinare gli integrali particolari soluzioni dei due Problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{9-y^2}{1-x^2} \\ y(0) = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{9-y^2}{1-x^2} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

2) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 2π–periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} -t & \text{se} \quad -\pi \leq t \leq 0, \\ \dfrac{t}{2} & \text{se} \quad 0 < t < \pi. \end{cases}$$

a) Disegnare il grafico della f.
b) Verificare che la f è sviluppabile in serie di Fourier.
c) Scrivere esplicitamente tale sviluppo.
d) Discutere la convergenza della serie alla funzione.
e) Utilizzando i risultati del punto precedente, determinare la somma della serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

3) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) = y \exp(9x^2 - 8y^2).$$

Determinare i punti critici della f e classificarli. Determinare poi il massimo ed il minimo assoluti della funzione f nel compatto

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ y \geq 0, \ x \geq 0, \ y \leq x, \ y \leq 2 - x\}.$$

4) Dopo aver verificato che l'equazione

$$\sin(x + y + \pi) - y \cos(x + y) + x^2 = 0$$

definisce implicitamente in un opportuno intorno di $O(0, 0)$ una e una sola funzione $y = g(x)$ tale che $g(0) = 0$, tracciare un grafico qualitativo della g in un intorno di $(0, 0)$.