APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DEL 9 GENNAIO 2014

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Definito il funzionale

$$\Phi(y) = \int_0^\pi \left[y'(x)^2 - y(x)^2 - 8y(x)\right] dx,$$

determinare le sue linee estremali $y \in C^2([0,\pi])$, soddisfacenti $y(0) = 2$ e con estremo destro libero.

2) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 2π–periodica, **pari**, definita da

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - t & \text{se} \quad 0 < t \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{se} \quad \dfrac{\pi}{2} < t \leq \pi. \end{cases}$$

a) Disegnare il grafico della f.
b) Verificare che la f è sviluppabile in serie di Fourier.
c) Scrivere esplicitamente tale sviluppo.
d) Discutere la convergenza della serie alla funzione.
e) Utilizzando i risultati del punto precedente, determinare la somma della serie numerica $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2}$.

3) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) = ye^{x^2-y}.$$

Determinare tutti i punti critici della f e classificarli. Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione f nel compatto

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}.$$

4) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 + 2y^3}{3x^2 + y^2} - 4x & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \qquad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dire se la funzione f è differenziabile nel punto $(0,0)$.
In caso di risposta affermativa, scrivere l'equazione del piano tangente alla funzione $z = f(x,y)$ nel punto $(0,0)$.