1) $\underline{y}' = \mathbb{A}\underline{y} + \underline{b}$ $\qquad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$\det(\lambda I - \mathbb{A}) = 0 \qquad \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -5 & \lambda-4 \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \qquad (\lambda-6)(\lambda+1) = 0$

$\lambda_1 = 6$
$\lambda_2 = -1$

$\lambda_1 = 6 \quad \underline{h}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$5\alpha - 2\beta = 0 \qquad \underline{h}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -1 \quad \underline{h}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\alpha + \beta = 0 \qquad \underline{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Quindi l'integrale del sistema omogeneo associato è

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} 2e^{6x} & e^{-x} \\ 5e^{6x} & -e^{-x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Troviamo l'integrale particolare del sistema completo con il Metodo della Variazione delle costanti arbitrarie

$$y_p = \mathbb{Z}(x) \int^x \mathbb{Z}^{-1}(t)\, \underline{b}(t)\,dt$$

$$\mathbb{Z}^{-1}(x) = -\frac{1}{7e^{5x}} \begin{bmatrix} -e^{-x} & -e^{-x} \\ -5e^{+6x} & 2e^{6x} \end{bmatrix}$$

$$y_p = \begin{bmatrix} 2e^{6x} & e^{-x} \\ 5e^{6x} & -e^{-x} \end{bmatrix} \int^x \begin{bmatrix} \frac{1}{7}e^{-6x} & \frac{1}{7}e^{-6x} \\ \frac{5}{7}e^{+} & -\frac{2}{7}e^{x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{9x} \\ 3e^{9x} \end{bmatrix} dx$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{6x} & e^{-x} \\ 5e^{6x} & -e^{-x} \end{bmatrix} \int^x \begin{bmatrix} \frac{4}{7} e^{3x} \\ -\frac{1}{7} e^{10x} \end{bmatrix} dx$$

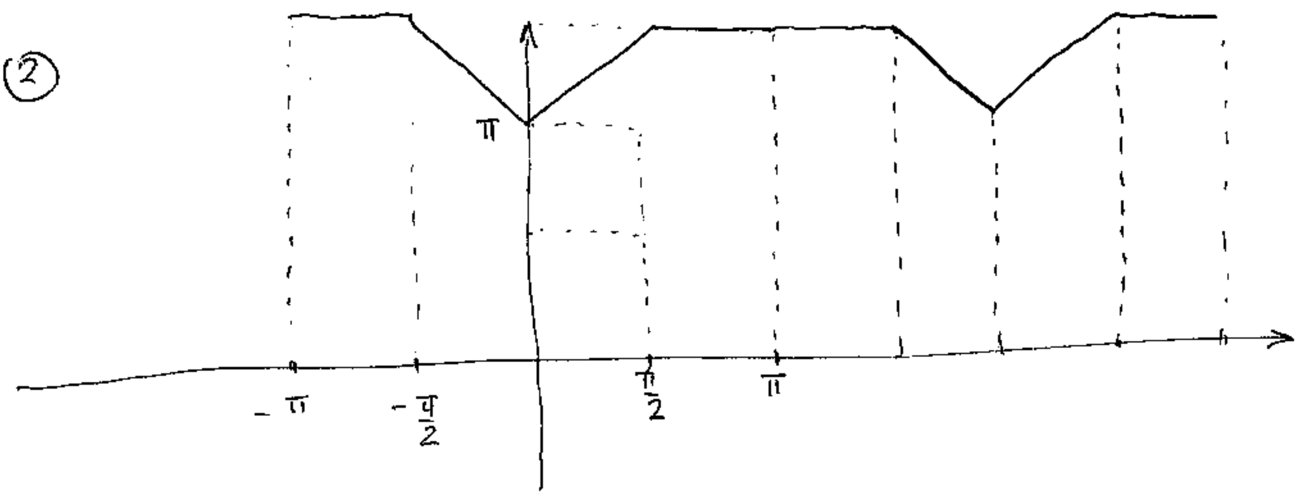
$$= \begin{bmatrix} 2e^{6x} & e^{-x} \\ 5e^{6x} & -e^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{21} e^{3x} \\ -\frac{1}{70} e^{10x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{21} e^{9x} - \frac{1}{70} e^{9x} \\ \frac{20}{21} e^{9x} + \frac{1}{70} e^{9x} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{77}{210} e^{9x} \\ \frac{203}{210} e^{9x} \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 2e^{6x} & e^{-x} \\ 5e^{6x} & -e^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{77}{210} e^{9x} \\ \frac{203}{210} e^{9x} \end{bmatrix}$$

2



Poiché $f \in C^0(\mathbb{R})$ ed è limitata e periodica, certamente $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$ è finito e quindi f è sviluppabile in serie di Fourier.

Poiché f è pari, concludiamo che $b_n = 0$. Calcoliamo gli altri coefficienti

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi+t)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{3}{2}\pi\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(\pi+t)^2}{2}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{3}{2}\pi\,\frac{\pi}{2}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{5}{8}\pi^2 + \frac{6}{8}\pi^2\right] = \frac{11}{4}\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi+t)\cos nt\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{3}{2}\pi\cos nt\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[(\pi+t)\frac{\sin nt}{n}\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin nt}{n}\,dt + \frac{3\pi}{2}\,\frac{\sin nt}{n}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{3}{2}\pi\frac{\sin n\pi/2}{n} - \frac{3\pi}{2}\,\frac{\sin n\pi/2}{n} + \frac{\cos nt}{n^2}\Big|_0^{\pi/2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\quad\frac{\cos n\pi/2 - 1}{n^2}$$

$$S(t) = \frac{11}{8}\pi + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi/2 - 1}{n^2}\cos nt$$

$$= \frac{11}{8}\pi + \frac{2}{\pi}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-)^k - 1}{(2k)^2}\cos 2kt\right]$$

$$= \frac{11}{8}\pi - \frac{2}{\pi}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)t - \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2}{(2l+1)^2}\cos 2(2l+1)t\right]$$

$$= \frac{11}{8}\pi - \frac{2}{\pi}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)t + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)^2}\cos 2(2l+1)t\right]$$

Poiché la f è di classe C^1 a tratti, la serie converge alla funzione nel senso dell'energia, puntualmente $\forall t \in \mathbb{R}$, uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

Prendendo $t=0$, dal precedente risultato di convergenza risulta

$$f(0) = S(0)$$

$$\pi = \frac{11}{8}\pi - \frac{2}{\pi}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^2}\right]$$

$$-\frac{\cancel{3}}{8}\pi = -\frac{\cancel{2}}{\pi}\frac{3}{\cancel{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

---

③ $f = x\ln(1+x^2+y^2)$

$$\nabla f = 0 \qquad \begin{cases} f_x = \dfrac{2x^2}{1+x^2+y^2} + \ln(1+x^2+y^2) = 0 \\ f_y = \dfrac{2xy}{1+x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

$f_y = 0$ se $x=0$ oppure $y=0$. Conseguentemente abbiamo

$$f_x(0,y) = \ln(1+y^2) \quad e \quad f_x(0,y)=0 \iff y=0$$

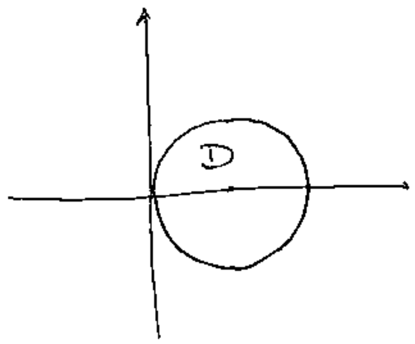
$$f_x(x,0) = \frac{2x^2}{1+x^2} + \ln(1+x^2) \quad e \quad f_x(x,0)=0 \iff x=0$$

Quindi effettivamente l'origine è punto critico. Senza calcolare le derivate seconde, osserviamo che

$$f(x,y)<0 \qquad se \quad x<0$$

$$f(x,y)>0 \qquad se \quad x>0$$

e quindi necessariamente l'origine è un punto di colle, perché f cambia segno in un arbitrario intorno dell'origine.



Poiché D è un compatto e f è continua in D, massimo e minimo assoluti esistono.

Dai risultati precedenti, abbiamo che essi sono necessariamente assunti sul bordo. Abbiamo

$$\partial D: \qquad y^2 = 2x - x^2 \qquad 0 \leq x \leq 2$$

Perciò

$$f|_{\partial D} = x \ln(1+x^2+2x-x^2)$$
$$= x\ln(1+2x) = g(x) \qquad x \in [0,2]$$

$$g'(x) = \frac{2x}{1+2x} + \ln(1+2x)$$

Poiché in $[0,2]$ $g' \geq 0$, concludiamo che

$$m = g(0) = 0 \qquad M = g(2) = 2\ln 5$$

---

(4) $f = y\, e^{x^2+y}$

Poiché f è il prodotto di due funzioni di classe C^∞, è essa stessa di classe C^∞. Quindi è sicuramente differenziabile. Osserviamo che

$f(0,0) = 0 \qquad f_x = 2xy\, e^{x^2+y} \qquad f_x(0,0) = 0$

$f_y = e^{x^2+y} + y\, e^{x^2+y} \qquad f_y(0,0) = 1 \qquad \pi_{tg}: z = y$