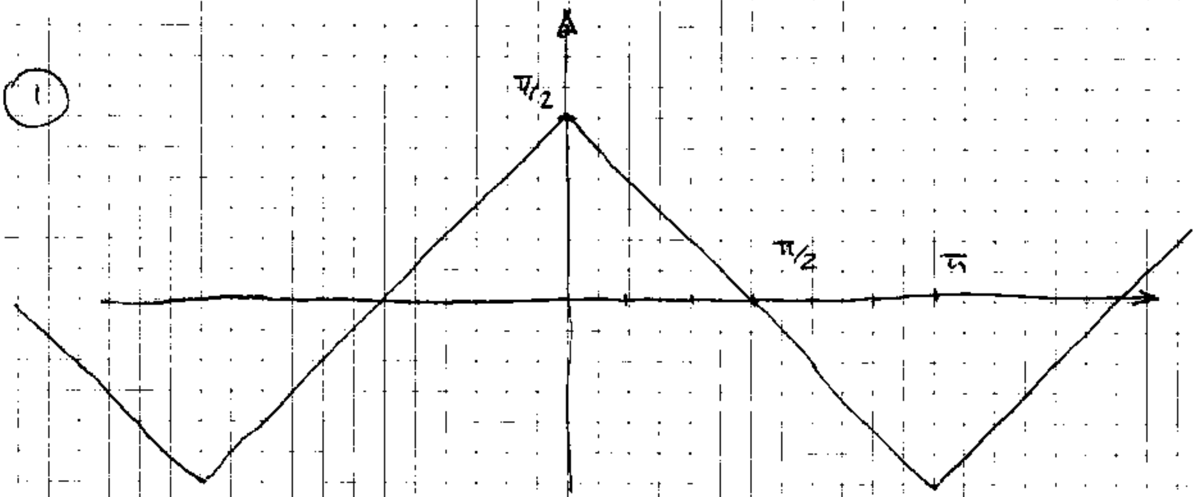
(1)



Poiché f è continua e limitata, sicuramente

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$$

e quindi la funzione è sviluppabile in serie di Fourier.

Poiché f è pari, la serie sarà di soli coseni.

Inoltre

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2\Big|_0^{\pi} = 0.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos nt\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\cancel{\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\frac{\sin nt}{n}}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\sin nt}{n}\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos nt}{n^2}\right)_0^{\pi} = \frac{2\left(1-(-)^n\right)}{\pi n^2}$$

Pertanto

$$S(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-)^n}{n^2}\cos nt$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)t$$

Poiché $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$, la serie converge alla funzione nel senso dell'energia e possiamo pertanto scrivere

$$f(t) \stackrel{E}{=} S(t).$$

Inoltre f è di classe C^1 a tratti. Pertanto la serie converge puntualmente ed uniformemente ad f in tutto $\mathbb{R}$. Quindi

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = S(t).$$

Per quanto riguarda l'uguaglianza di Parseval, abbiamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

$$2\int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2 dt = \pi \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$2\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^3 \Big|_0^{\pi} = \frac{16}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{\cancel{2}}{3} \cdot \cancel{2} \cdot \frac{\pi^3}{8} \cdot \frac{\pi}{\cancel{16}_4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Infine, scegliendo $t = 0$, abbiamo

$$f(0) = S(0)$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

---

(2) $y'' + 10y' + 50y = x^2 + e^x$

L'equazione omogenea associata è

$$z'' + 10z' + 50z = 0$$

e l'equazione caratteristica è

$$\alpha^2 + 10\alpha + 50 = 0$$

$$(\alpha + 5)^2 = -25$$

$$\alpha = -5 \pm 5i$$

Quindi l'integrale generale è

$$y = e^{-5x}\left[C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x\right] + y_p$$

e l'integrale particolare y_p ha l'espressione, dedotta dalle tabelle

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + De^x$$

$$y_p' = 2Ax + B + De^x$$

$$y_p'' = 2A + De^x$$

Sostituendo nell'equazione, abbiamo

$$2A + De^x + 20Ax + 10B + 10De^x +$$

$$+ 50Ax^2 + 50Bx + 50C + 50De^x = x^2 + e^x$$

Uguagliando membro a membro otteniamo

e^x : $61D = 1 \implies D = 1/61$

x^2 : $50A = 1 \implies A = 1/50$

x : $20A + 50B = 0 \qquad \frac{2}{5} + 50B = 0 \quad B = -\frac{1}{125}$

1 : $2A + 10B + 50C = 0 \qquad \frac{1}{25} - \frac{2}{25} + 50C = 0 \quad C = +\frac{1}{1250}$

Dunque l'integrale generale è

$$y = e^{-5x}\left(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x\right) + \frac{1}{61}e^x +$$

$$+ \frac{1}{50}x^2 - \frac{1}{125}x + \frac{1}{1250}$$

da cui

$$y' = -5e^{-5x}(C_1\cos 5x + C_2 \sin 5x) +$$
$$+ 5e^{-5x}(-C_1 \sin 5x + C_2 \cos 5x) +$$
$$+ \frac{1}{61}e^{x} + \frac{1}{25}x - \frac{1}{125}$$

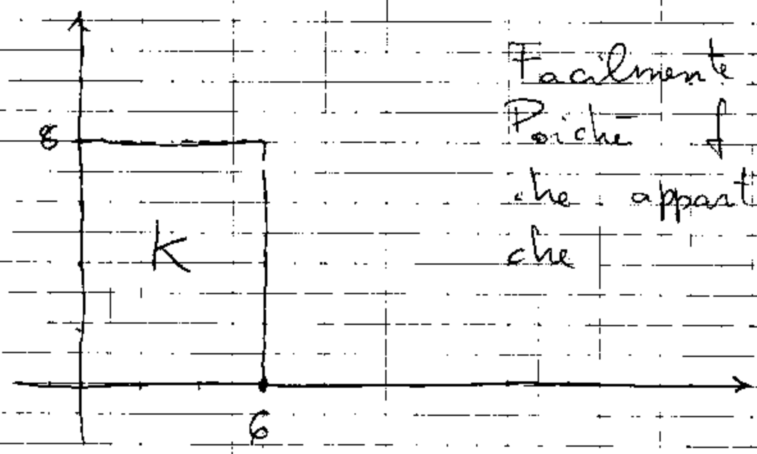
Sostituendo le C.I., otteniamo il sistema

$$\begin{cases} C_1 + \frac{1}{61} + \frac{1}{1250} = 1 \\ -5C_1 + 5C_2 + \frac{1}{61} - \frac{1}{125} = 2 \end{cases}$$

da cui facilmente si ottengono C_1 e C_2

---

(3)



Facilmente si osserva che $f \geq 0$. Poiché f è nulla solo nell'origine che appartiene a K, concludiamo che $\min_K f = 0$.

Passiamo alla ricerca del massimo assoluto.

$$\nabla f = 0 \implies \begin{cases} 8x = 0 \\ 18y = 0 \end{cases} \implies (0,0)$$

che è il punto di minimo assoluto. Dunque, il massimo assoluto si trova sul bordo.

$$\partial K = \ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3 \cup \ell_4$$

$$\ell_1 : \begin{cases} y = 0 \\ x = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 6 \quad f|_{\ell_1} = 4t^2$$

$$M_{\ell_1} = 144$$

$$\ell_2 : \begin{cases} x = 6 \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 8 \quad f|_{\ell_2} = 144 + 9t^2$$

$$M_{\ell_2} = 144 + 9 \cdot 64 = 720$$

$$\ell_3 : \begin{cases} y = 8 \\ x = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 6 \qquad f\Big|_{\ell_3} = 4t^2 + 576$$

$$M_{\ell_3} = 720$$

$$\ell_4 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 8 \qquad f\Big|_{\ell_4} = 9t^2$$

$$M_{\ell_4} = 576$$

Quindi $M_{ass} = 720$ ed è assunto in $(6, 8)$.

---

④ La funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 + y^2 = 0$$

è di classe C^∞ in tutto $\mathbb{R}^2$.
Posso, dunque, applicare il Teorema di Dini e concludere che i punti di Γ a tangente orizzontale soddisfano il sistema

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - x^2 + y^2 = 0 \\ 4x^3 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x(2x^2 - 1) = 0 \\ x^4 + y^4 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + y^4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y^4 + y^2 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$$

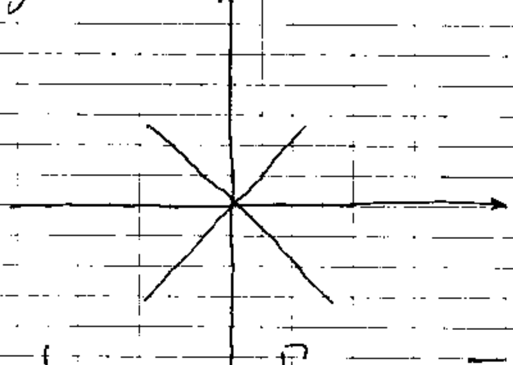
La soluzione $(0,0)$ è da scartare, perchè in corrispondenza anche f_y si annulla.

Sono, invece, accettabili le quattro soluzioni

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1/\sqrt{2} \\ y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1/\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{cases}$$

L'origine è un punto singolare. Inoltre si verifica, con qualche calcolo che qui tralasciamo, che localmente il grafico di Γ è come in figura



Nell'origine, dunque, Γ non è un grafico.