COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA Prova del 30-3-2015	Cognome e Nome

1. Trovare gli estremali del funzionale

$$F(x,u(x),u'(x)) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}u'(x)^2 + e^x u'(x)\right) dx$$

tra le funzioni $u \in C^2([0,1])$ con $u(0) = 0$ e $u(1) = 0$.

2. Dimostrare che l'equazione

$$(x+y)e^{xy} + xy - 1 = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ in un intorno del punto $(0,1)$. Scrivere inoltre l'equazione della rette tangente al grafico di g nel punto $(0,1)$.

3. Si consideri la funzione

$$f(x) = x^4, \quad x \in (-\pi, \pi]$$

estesa con periodicità 2π in $\mathbf{R}$. Si scriva la sua serie di Fourier.
Dimostrare inoltre che $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$, sapendo che $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

4. Trovare l'insieme di tutte le soluzioni del sistema di equazioni

$$v'(x) = 9u(x)$$
$$u'(x) = v(x)$$

5. Trovare (con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange) il minimo della funzione $f(x,y) = x^4 + y^4$ soggetta al vincolo $x + y = 2$. Nel caso il vincolo fosse $x + y \leq 2$ si avrebbe lo stesso risultato?

6. Sia

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Trovare se esistono, e in tal caso classificarli, i punti stazionari di f .

- **Tempo a disposizione: 2h30.**