COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA Prova del 25-2-2015	Cognome e Nome

1. Stabilire se la funzione definita da

$$f(x,y)=\frac{x^3y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \text{per} \quad x,y\neq 0 \quad \text{e} \quad f(0,0)=0\ ,$$

è continua e differenziabile in tutto $\mathbf{R}^2$.

2. Dimostrare che l'equazione

$$y^5+y-xe^x=0$$

definisce implicitamente una funzione $y=g(x)$ in un intorno del punto $(0,0)$. Scrivere il polinomio di Mc Laurin di ordine 2 di tale funzione $g(x)$.

3. Si consideri la funzione $f(x)=0$ se $x\in(-\pi,0]$ e $f(x)=1$ se $x\in(0,\pi]$, estesa in $\mathbf{R}$ con periodicità 2π . Si scriva la sua serie di Fourier e se ne discuta la convergenza. Si calcoli inoltre $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}$

4. Trovare l'integrale generale della seguente equazione differenziale del III ordine

$$u'''(x)-u'(x)=e^x$$

5. Dopo aver studiato la natura del punto $(0,0)$ per la funzione $f(x,y)=x^2y$, trovare il massimo e il minimo assoluto di $f(x,y)$ ristretta a

$$D:=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}.$$

6. Scrivere (se esiste) l'equazione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y)=e^{x-y^2}$$

nel punto $(1,0,f(1,0))$. Discutere se, in un intorno di tale punto, il grafico della funzione sta sopra o sotto al piano tangente.

- **Tempo a disposizione: 2h30.**