COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA Prova del 17-6-2015	Cognome e Nome

1. Trovare gli estremali del funzionale

$$F(x,u(x),u'(x)) = \int_0^1 \left(u'(x)^2 + 2xu(x)\right)\,dx$$

tra le funzioni $u \in C^2([0,1])$ con $u(0)=1$ e $u(1)=2$.

2. Dimostrare che l'equazione

$$e^{xy} + x^2 + y - e^x = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ in un intorno del punto $(0,0)$.
Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto di ascesa $x=0$.

3. Si consideri la funzione

$$f(x) = x, \quad x \in [0,1)$$

estesa con periodicità $T=1$ in $\mathbf{R}$. Si scriva la sua serie di Fourier.
Utilizzando i risultati di convergenza puntuale della serie di Fourier calcolare $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$

4. Trovare le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{aligned} u'(x) &= 3u(x) - v(x) \\ v'(x) &= 3v(x) - u(x) \end{aligned}$$

5. Si consideri la funzione $f(x,y) = xy$. Trovare eventuali punti di estremo di f nell'insieme $D := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

6. Sia

$$f(x) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Estendere con continuità la funzione in $(0,0)$ e discuterne la derivabilità e la differenziabilità in questo caso.

- **Tempo a disposizione: 2h30.**