COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA Prova del 28-1-2015	Cognome e Nome

1. Trovare gli estremali del funzionale

$$F(x, u(x), u'(x)) = \int_0^1 \left(u'(x)^2 + u(x)^2 \right) dx$$

tra le funzioni $u \in C^2([0,1])$ con $u(0) = 1$ e $u(1) = 0$.

2. Dimostrare che l'equazione

$$e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x+1) + 1 = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ in un intorno del punto $(0, -1)$. Dimostrare che $x = 0$ è un punto stazionario per $g(x)$ e, se possibile, stabilirne la natura.

3. Si consideri la funzione

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

estesa con periodicità 2π in $\mathbf{R}$. Si scriva la sua serie di Fourier.
Utilizzando i risultati di convergenza puntuale della serie di Fourier calcolare $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

4. Trovare le soluzioni del sistema di equazioni

$$v'(x) = v(x) + u(x)$$
$$u'(x) = -u(x)$$

5. Trovare le lunghezze x e y dei lati di un rettangolo in modo tale che l'area del rettangolo sia massima sotto il vincolo che sia il perimetro $2P = 2$.

6. Sia

$$f(x) = x^2 y^3 (6 - x - y)$$

Trovare se esistono, e in tal caso classificarli, i punti stazionari di f (nota: nel caso in cui non si possa dedurre nulla applicando il criterio della matrice hessiana, conviene studiare il segno di f).

- **Tempo a disposizione: 2h30.**