ESERCIZIO 1

In forma matriciale: $\vec{Y}' = A\vec{Y}$

dove $\vec{Y} = (x, y, z)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Determiniamo gli autovalori di A:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 + 33\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 8\lambda - 33) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = 11$

Ora gli autovettori:

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \iff \begin{cases} 4x - 8y - 2z = 0 \\ -5x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -5y \\ z = -14y \end{cases}$$

$$\vec{v}_1 = (-5, 1, -14)$$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0} \iff \begin{cases} 7x - 8y - 2z = 0 \\ -5x + 6y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + 4z = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = y \\ z = -\frac{1}{2}y \end{array}$$

$$\vec{v}_2 = (-2, -2, 1)$$

$$(A - \lambda_3 \vec{v})\vec{v} = \vec{0} \iff \begin{cases} -7x - 8y - 2z = 0 \\ -5x - 8y + 2z = 0 \\ -2x + 4y - 10z = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 3x = -4y \\ z = -\frac{1}{2}x \end{array}$$

$$\vec{v}_3 = \left(2, -\frac{3}{2}, -1\right)$$

Base di soluzioni : $\left\{ \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \vec{v}_3 e^{\lambda_3 t} \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}, \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} e^{11t} \right\}$$

Integrale generale : $\vec{Y}(t) = Z(t)\,\vec{c}$ dove

$$Z(t) = \begin{pmatrix} -5 & -2e^{-3t} & 2e^{11t} \\ 1 & -2e^{-3t} & -\frac{3}{2}e^{11t} \\ -14 & e^{-3t} & -e^{11t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \qquad c_i \in \mathbb{R}$$

ESERCIZIO 2

$$\lambda^2 + 4\lambda + k = 0 \qquad \lambda_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4-k}$$

$4-k>0$ $(k<4)$ due soluzioni reali e distinte

$4-k=0$ $(k=4)$ due soluzioni reali e coincidenti

$4-k<0$ $(k>4)$ due soluzioni complesse coniugate

Integrale generale eq. omogenea

$$y(x) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} & \text{se } k<4 \\ c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} & \text{se } k=4 \\ c_1 e^{-2x}\cos(\sqrt{k-4}\,x) + c_2 e^{-2x}\operatorname{sen}(\sqrt{k-4}\,x) & k>4 \end{cases}$$

Soluzione particolare eq. completa

$k<4$ $\qquad -2+\sqrt{4-k}=1 \iff k=-5$

Quindi per $k=-5$ $\qquad y_p(x)=Axe^x$

sostituendo : $A=\frac{1}{6}$

Per $k\neq-5$ e per $k\geq 4$ $\qquad y_p(x)=Ae^x$

e quindi $\quad A=\dfrac{1}{k+5}$

Integrale generale eq. completa:

$$y(x)=\begin{cases} c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}+\dfrac{1}{k+5}e^x & k<4 \text{ e } k\neq-5 \\ c_1e^x+c_2e^{-5x}+\frac{1}{6}xe^x & \text{se } k=-5 \\ c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+\dfrac{1}{9}e^x & \text{se } k=4 \\ c_1e^{-2x}\cos(\sqrt{k-4}\,x)+c_2e^{-2x}\operatorname{sen}(\sqrt{k-4}\,x)+\dfrac{1}{k+5}e^x & \text{se } k>4 \end{cases}$$

Imponendo le condizioni ai limiti:

$k<4$ e $k\neq-5$

$$\begin{cases} c_1+c_2+\dfrac{1}{k+5}=0 \\ c_1e^{\lambda_1}+c_2e^{\lambda_2}+\dfrac{e}{k+5}=0 \end{cases}$$

La matrice del sistema omogeneo ha det $\neq 0$
Esiste un'unica soluzione $(\bar c_1,\bar c_2)$ e un'unica sol. del pb ai limiti

$k=-5$ ancora un'unica soluzione

$k=4$

$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{9} = 0 \\ c_1 e^{-2} + c_2 e^{-2} + \frac{1}{9} e = 0 \end{cases}$$

$\exists$ un'unica soluzione

$k>4$

$$\circledast \quad \begin{cases} c_1 + \frac{1}{k+5} = 0 \\ c_1 e^{-2} \cos\sqrt{k-4} + c_2 e^{-2} \operatorname{sen}\sqrt{k-4} + \frac{e}{k+5} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ e^{-2}\cos\sqrt{k-4} & e^{-2}\operatorname{sen}\sqrt{k-4} \end{vmatrix} = e^{-2}\operatorname{sen}\sqrt{k-4} = 0$$

$$\iff \quad \sqrt{k-4} = n\pi \quad , \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

$$\iff \quad k = 4 + n^2\pi^2 \qquad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

Per $k \neq 4 + n^2\pi^2$ esiste un'unica soluzione

Per $k = 4 + n^2\pi^2$ il sistema $\circledast$ diventa:

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{1}{9+n^2\pi^2} \\ c_1 e^{-2} (-1)^n + \frac{e}{9+n^2\pi^2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{e^{-2}(-1)^n}{9+n^2\pi^2} = \frac{e}{9+n^2\pi^2} \iff e^{-2}(-1)^n = e$$

nessuna soluzione

ESERCIZIO 3

$$f(x,y) = xy^2(1-x-2y)$$

$$\begin{cases} \partial_x f = y^2(1-x-2y) - xy^2 = 0 \\ \partial_y f = 2xy(1-x-2y) - 2xy^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2(1-2x-2y) = 0 \\ xy(1-x-3y) = 0 \rightarrow x=0 \ \vee \ y=0 \ \vee \ 1-x-3y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \ \vee \ y=\frac{1}{2} \\ x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} 0=0 \\ y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y^2(4y-1)=0 \\ x=1-3y \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{4} \\ x=1 \end{cases}$$

I punti stazionari sono:

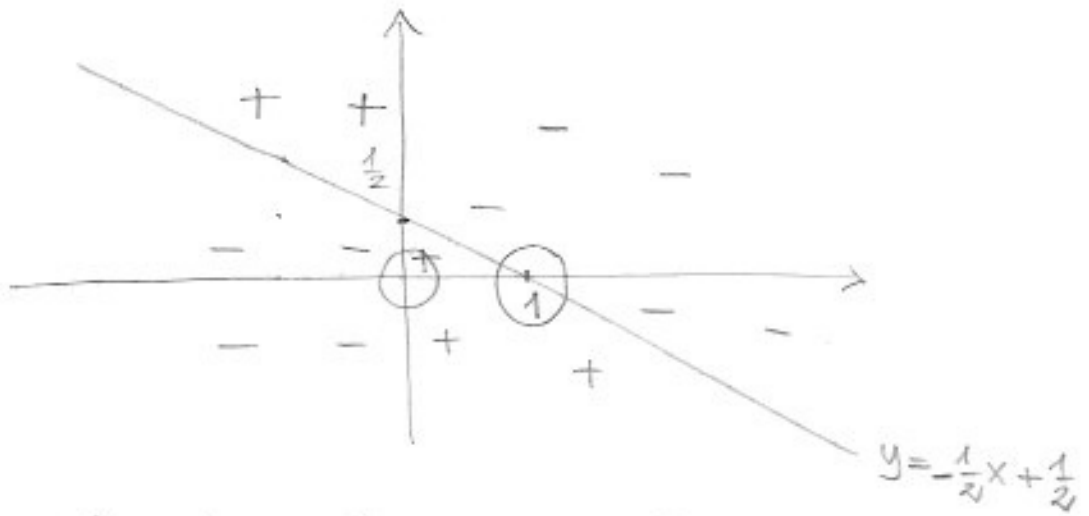
$$\underset{\text{asse } x}{\underset{\downarrow}{(x,0)}} \quad \left(0,\frac{1}{2}\right) \quad e \quad \left(1,\frac{1}{4}\right)$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2y^2 & 2y-4xy-6y^2 \\ 2y-4xy-6y^2 & 2(x-x^2-6xy) \end{pmatrix}$$

$$Hf(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2(x-x^2) \end{pmatrix}$$ <u>Semi</u>definita

Valutiamo il segno dell'incremento $(f(x,0)=0)$

$f(x,y) \geq 0 \iff x(1-x-2y) \geq 0$



Dal grafico si evince che se $x_0 < 0$ oppure $x_0 > 1$, il punto $(x_0, 0)$ è di massimo per f (si riesce a trovare un intorno dove $f \leq 0$)

Se $0 < x_0 < 1$ allora $(x_0, 0)$ è di minimo

Se $x_0 = 0$ oppure $x_0 = 1$ allora il punto $(x_0, 0)$ è di sella

$$\mathcal{H}f\left(0, \tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

det $< 0 \Rightarrow$ indefinita $\Rightarrow$ punto sella

(anche questo punto si poteva classificare con il grafico dato che $f(0, \frac{1}{2}) = 0$)

$$\mathcal{H}f\left(1, \tfrac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{7}{8} \\ -\frac{7}{8} & -3 \end{pmatrix}$$

det $< 0 \Rightarrow$ pto sella

ESERCIZIO 4

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(e^x + \cos y + z - 2,\ \log(1+x^2) + y + 15z\right)$$

$\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$

$\vec{F}(0,0,0) = (0,0)$

$$\operatorname{Jac}\vec{F} = \begin{pmatrix} e^x & -\sin y & 1 \\ \frac{2x}{1+x^2} & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Jac}_{yz}\vec{F}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}$$ ha $\det = -1 \neq 0$

$\underset{\text{Dini}}{\Rightarrow}$ $\exists!$ $\vec{g}(x) = (y(x), z(x))$ definita implicitamente dall' eq. $\vec{F} = \vec{0}$. Precisamente

$\vec{g}(0) = (0,0)$

$\vec{F}(x, y(x), z(x)) = (0,0)$

$$\vec{g}'(0) = -\left(\operatorname{Jac}_{yz}\vec{F}(0,0,0)\right)^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-1\end{pmatrix}$$

Quindi $y'(0) = 15$ e $z'(0) = -1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{z(x)} = \frac{0}{0} \xrightarrow[\text{De L'Hopital}]{} \lim_{x\to 0} \frac{y'(x)}{z'(x)} = -15 \checkmark$$

Esercizio 5

$$\mathcal{L}(x) = \int_0^1 (\dot{x}^2 - \lambda x)\,dt$$

Eq. di E.L. : $\frac{d}{dt}\left(2\dot{x}\right) + \lambda = 0$

$$\Rightarrow \quad 2\ddot{x} = -\lambda \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\dot{x} = -\frac{\lambda}{2}t + c_1$$

$$x = -\frac{\lambda}{4}t^2 + c_1 t + c_2$$

$x(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$

$x(1) = 6 \Rightarrow -\frac{\lambda}{4} + c_1 + 1 = 6 \Rightarrow c_1 = 5 + \frac{\lambda}{4}$

$$\int_0^1 x = 3 \Rightarrow -\frac{\lambda}{4}\int_0^1 t^2 dt + \left(5 + \frac{\lambda}{4}\right)\int_0^1 t\,dt + \int_0^1 1\,dt = 3$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\lambda}{12} + \frac{5}{2} + \frac{\lambda}{8} + 1 = 3 \Rightarrow \lambda = -12$$

$$\hat{x} = 3t^2 + 2t + 1$$

ESERCIZIO 6

$$f(x,y) = \sqrt[5]{(x-1)\,y^2}$$

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}^2$; f è continua in $\mathbb{R}^2$ perchè composizione di funzioni continue.

$$f(1,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$$

$$f(x,0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt[5]{(x-1)\,y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$$

cambio di variabili $\quad x = 1+\rho\cos\theta$

$\quad y = \rho\sin\theta$

$$\frac{\rho^{\frac{3}{5}}\sqrt[5]{\cos\theta\sin^2\theta}}{\rho} = \frac{\sqrt[5]{\cos\theta\sin^2\theta}}{\rho^{2/5}}$$

non ammette limite nullo per $\rho\to 0$

$\Rightarrow$ f non è diff.^{a} in $(1,0)$

$f(2,y) = \sqrt[5]{y^2}$ non è derivabile in $y=0$

perchè $\left(\sqrt[5]{y^2}\right)' = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{y^{3/5}}$

$\Rightarrow$ f non è diff.^{le} in $(2,0)$